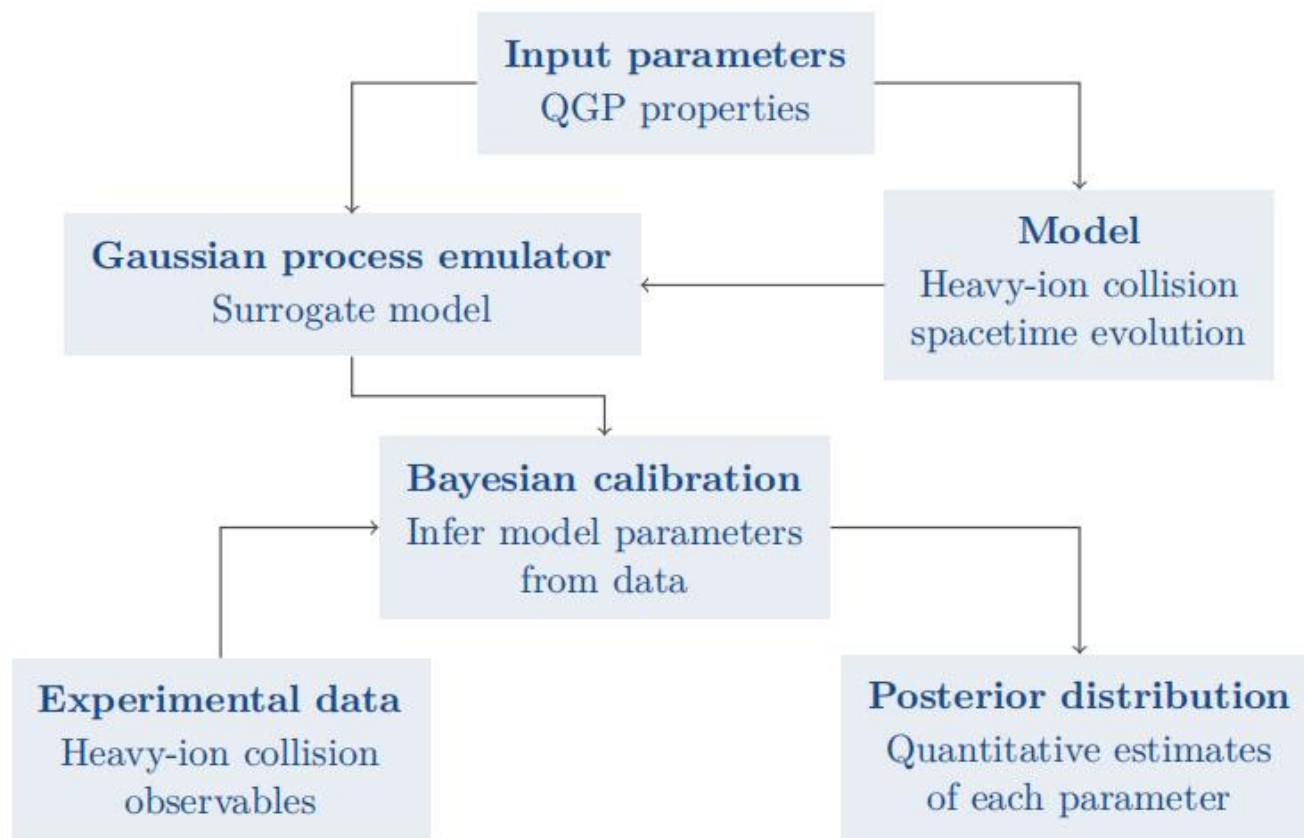


利用HIC模型提取声速

Qiyang Cai

Bayesian model

- 流程图



Input parameter

- 用Latin hypercube生成一组9维的随机数数据，准备输入到model中。

TABLE I. Input parameter ranges for the initial condition and hydrodynamic models.

Parameter	Description	Range
Norm	Overall normalization	100–250
p	Entropy deposition parameter	−1 to +1
k	Multiplicity fluct. shape	0.8–2.2
w	Gaussian nucleon width	0.4–1.0 fm
η/s hrg	Const. shear viscosity, $T < T_c$	0.3–1.0
η/s min	Shear viscosity at T_c	0–0.3
η/s slope	Slope above T_c	0–2 GeV ^{−1}
ζ/s norm	Prefactor for $(\zeta/s)(T)$	0–2
T_{switch}	Particlization temperature	135–165 MeV

代码上：

```
# 5.02 TeV has ~1.2x particle production as 2.76 TeV
# [https://inspirehep.net/record/1410589]
norm_range = {
    2760: (8., 20.),
    5020: (10., 25.),
}[self.beam_energy]

self.keys, labels, self.range = map(list, zip(*[
    ('norm',          r'{Norm}',          (norm_range    )),
    ('trento_p',      r'p',                ( -0.5,    0.5)),
    ('fluct_std',      r'\sigma {fluct}',    ( 0.0,    2.0)),
    ('nucleon_width', r'w [{fm}]',          ( 0.4,    1.0)),
    ('dmin3',          r'd {min} [{fm}]',    ( 0.0, 1.7**3)),
    ('tau_fs',         r'\tau {fs} [{fm}/c]', ( 0.0,    1.5)),
    ('etas_hrg',       r'\eta/s {hrg}',      ( 0.1,    0.5)),
    ('etas_min',       r'\eta/s {min}',      ( 0.0,    0.2)),
    ('etas_slope',     r'\eta/s {slope} [{GeV}^{-1}]', ( 0.0,    8.0)),
    ('etas_crv',       r'\eta/s {crv}',      (-1.0,    1.0)),
    ('zetas_max',      r'\zeta/s {max}',      ( 0.0,    0.1)),
    ('zetas_width',    r'\zeta/s {width} [{GeV}]', ( 0.0,    0.1)),
    ('zetas_t0',       r'\zeta/s T_0 [{GeV}]', (0.150, 0.200)),
    ('Tswitch',        r'T {switch} [{GeV}]', (0.135, 0.165)),
]))
```

- Latin hypercube:
- 半随机的, n 维空间分布。

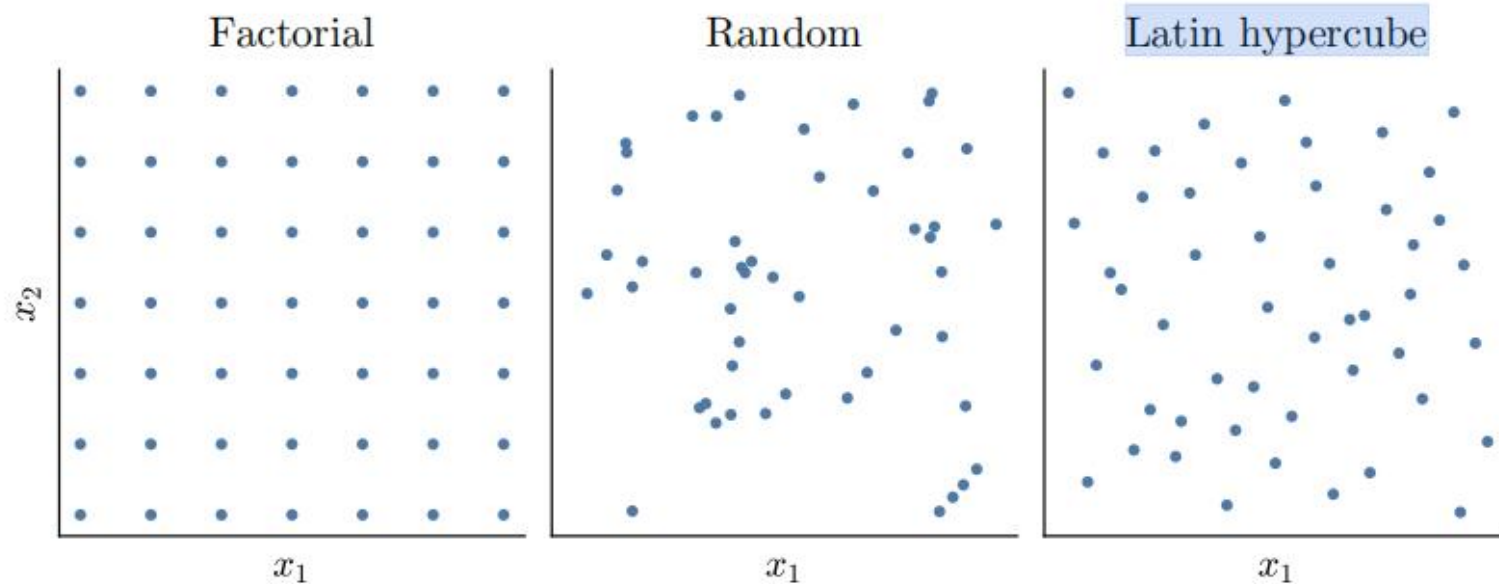


Figure 4.3 Examples of factorial, random, and maximin Latin hypercube designs in two dimensions. Each has $7^2 = 49$ points.

model

- 用Latin hypercube生成了一组九维参数后，我们将这组参数放到model里。

The collision model consists of the following stages:

- [trento](#) – initial conditions
- [freestream](#) – pre-equilibrium
- [OSU hydro](#) – viscous 2+1D hydrodynamics
- [frzout](#) – particlization
- [UrQMD](#) – hadronic afterburner

model output

```
results = np.empty((), dtype=[
    ('initial_entropy', float_t),
    ('nsamples', int_t),
    ('dNch_deta', float_t),
    ('dET_deta', float_t),
    ('dN_dy', [(s, float_t) for (s, _) in species]),
    ('mean_pT', [(s, float_t) for (s, _) in species]),
    ('pT_fluct', [('N', int_t), ('sum_pT', float_t), ('sum_pTsqr', float_t)]),
    ('flow', [('N', int_t), ('Qn', complex_t, 8)]),
])
```

```
species = [
    ('pion', 211),
    ('kaon', 321),
    ('proton', 2212),
    ('Lambda', 3122),
    ('Sigma0', 3212),
    ('Xi', 3312),
    ('Omega', 3334),
]
```

Gaussian process emulators

- 计算model里对应的观测量，将这些观测量组织为我们的训练集 Y 。
- $dN/dy(\pi, K, p)$
- $\text{mean } p_T(\pi, K, p)$
- $v_n\{2\}, n=2,3,4$
- 将model output 计算得到的物理量作为训练矩阵 Y ，将Latin hypercube生成的九维参数作为设计矩阵 X ，使用主成分分析，每个主成分分别用高斯过程模拟，构建代理模型，在emulators中预测其他参数点的输出。

Bayesian calibration

- 利用贝叶斯定理，将我们对参数的先验知识与模型计算和实验数据相结合，得到参数的后验概率分布。

$$P(\mathbf{x}_\star | X, Y, \mathbf{y}_{\text{exp}}) \propto P(X, Y, \mathbf{y}_{\text{exp}} | \mathbf{x}_\star) P(\mathbf{x}_\star)$$

$\mathbf{x}_\star$	待估计的“真实”模型参数
X, Y	已知的训练数据（参数设计点 X 和对应的模型输出 Y ）
$\mathbf{y}_{\text{exp}}$	实验观测数据
后验概率 $P(\mathbf{x}_\star \dots)$	在已知所有数据和实验结果的条件下，参数 $\mathbf{x}_\star$ 为真实值的 概率 。这是我们最终想要的结果。
似然函数 $P(\dots \mathbf{x}_\star)$	假设参数 $\mathbf{x}_\star$ 是真实的，那么观察到当前实验数据 $\mathbf{y}_{\text{exp}}$ 的概率有多大。
先验概率 $P(\mathbf{x}_\star)$	在考虑任何数据之前，我们对参数 $\mathbf{x}_\star$ 的 初始认知 （例如，基于物理知识的合理范围）。

Bayesian calibration

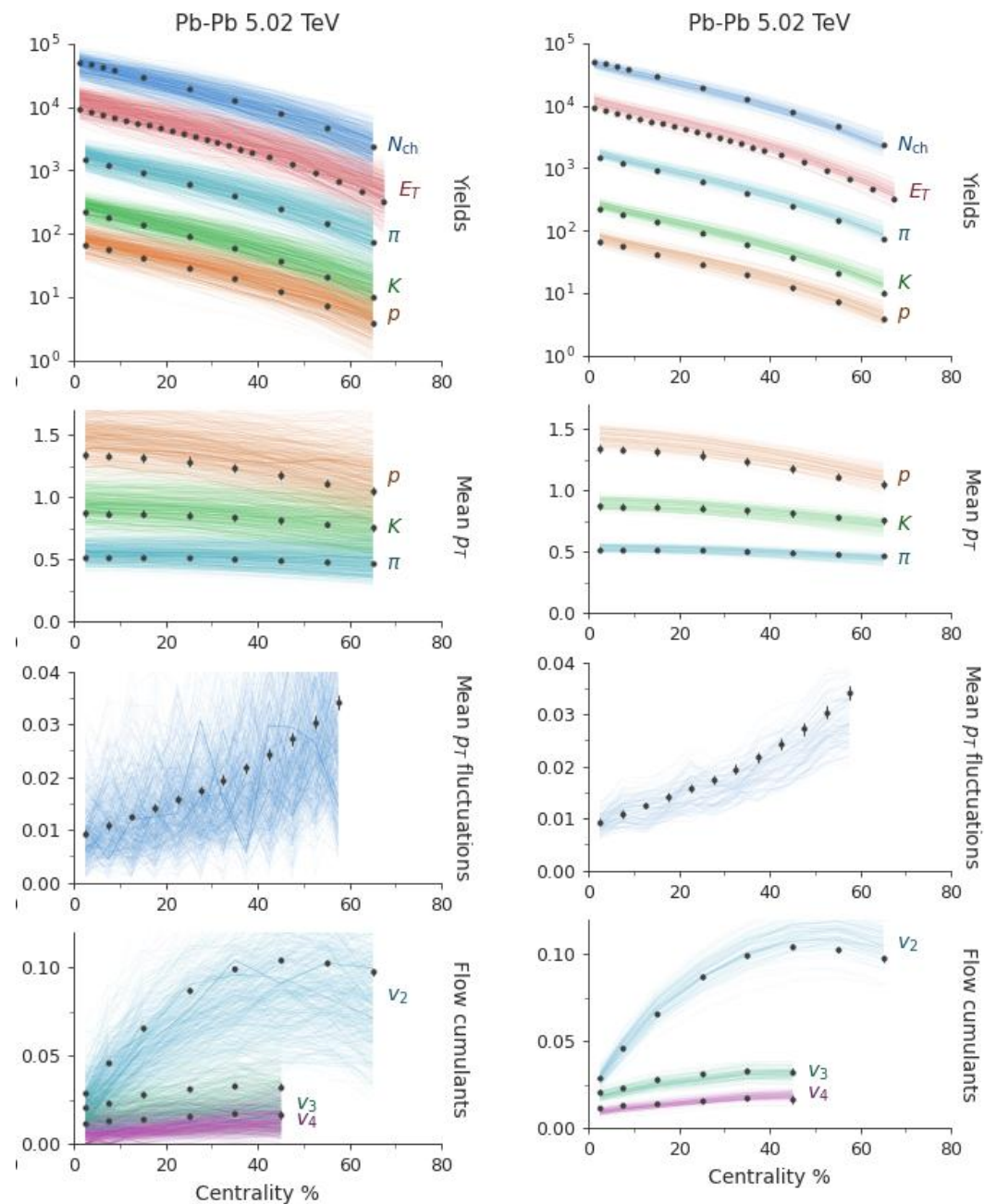
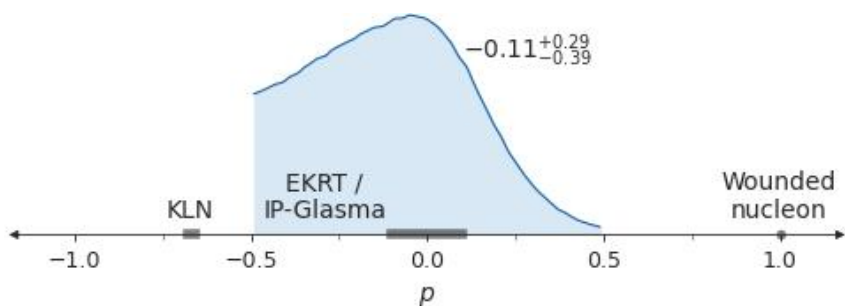
- 将实验数据转换到主成分空间, 得到 $\mathbf{z}_{\text{exp}}$, 然后计算似然函数:
- ($\mathbf{z}_*$ 是 $\mathbf{x}_*$ 对应的主成分预测值, 大 Σ 是协方差矩阵)

$$\begin{aligned} P &= P(X, Y, \mathbf{y}_{\text{exp}} | \mathbf{x}_*) \\ &= P(X, Z, \mathbf{z}_{\text{exp}} | \mathbf{x}_*) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{z}_* - \mathbf{z}_{\text{exp}})^\top \Sigma_z^{-1} (\mathbf{z}_* - \mathbf{z}_{\text{exp}}) \right\} \end{aligned}$$

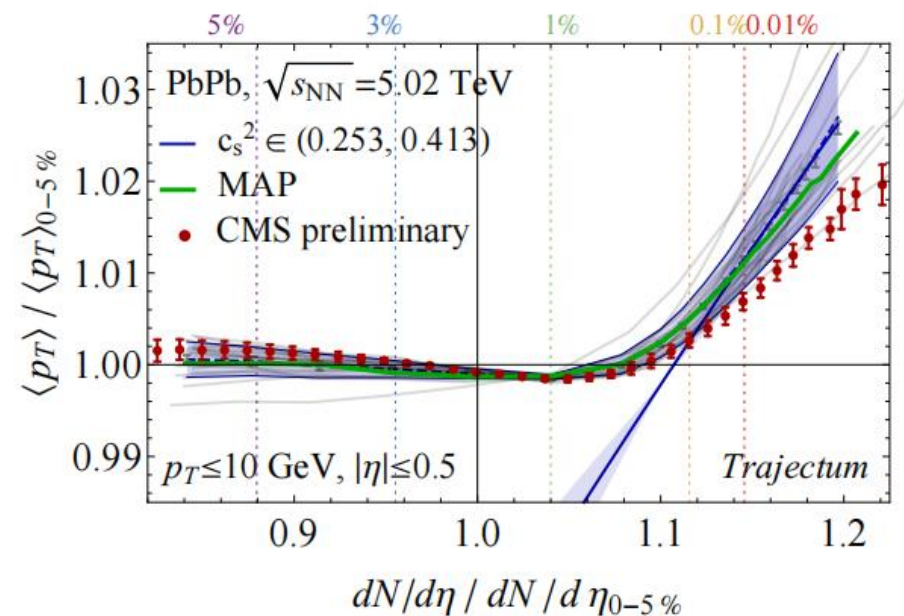
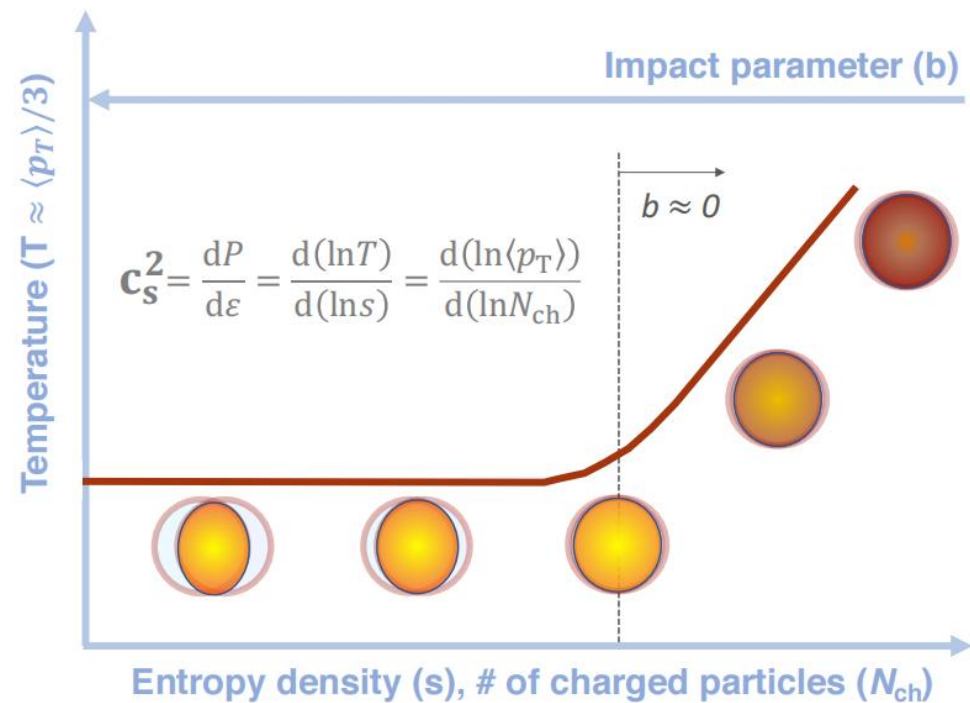
Bayesian calibration

- 将先验和似然代入贝叶斯公式，就得到了后验概率。这个后验概率分布是一个在9维参数空间中的复杂函数，无法直接写出解析解。
- 后验采样：利用MCMC（Markov chain Monte Carlo）。
- 使用仿射不变集合采样器（affine-invariant ensemble sampler，一种MCMC算法），它使用了大量相互依赖的行走者。我们先运行 10^6 步骤，让chain达到稳定状态，放弃这些“老化”样本，然后生成 10^7 后验样本。

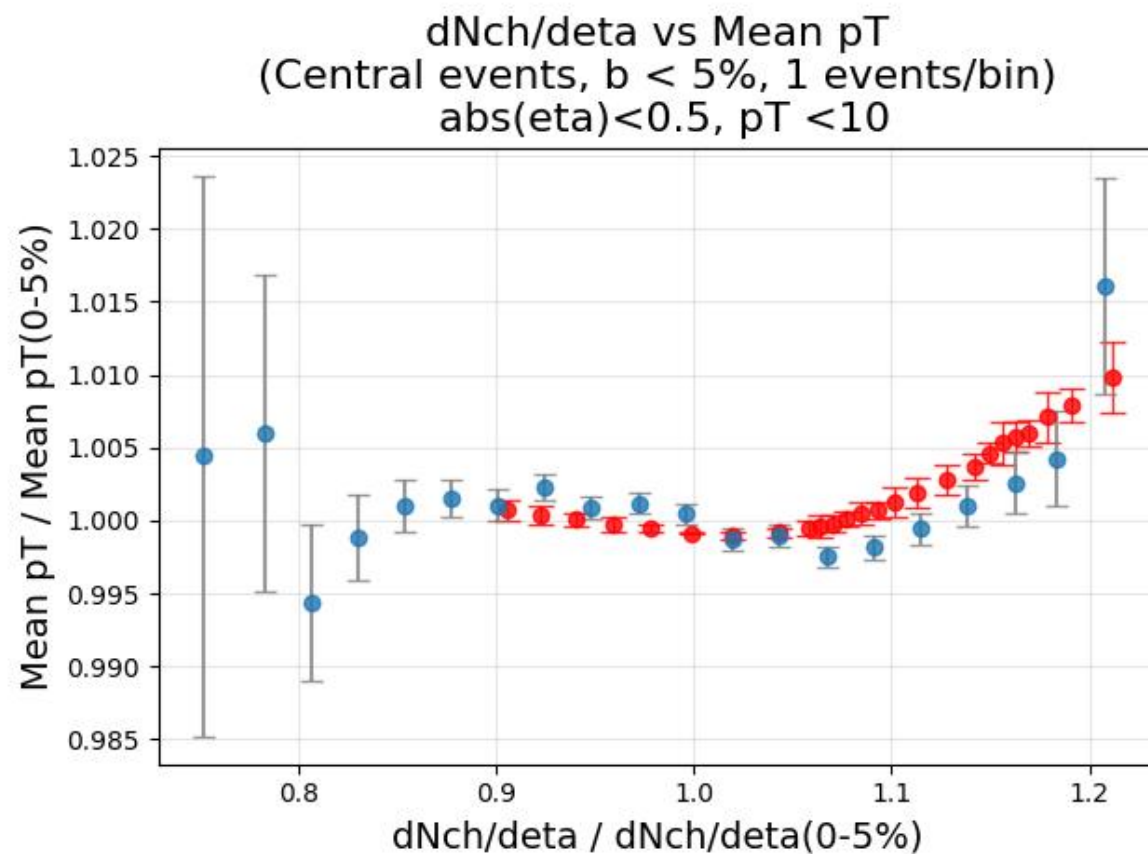
- 左边是利用model output 直接计算得到的，右边是经过bayesian分析后得到的。
- 于是得到了对应的一组初始参数。再次将它们放入model中进行计算。



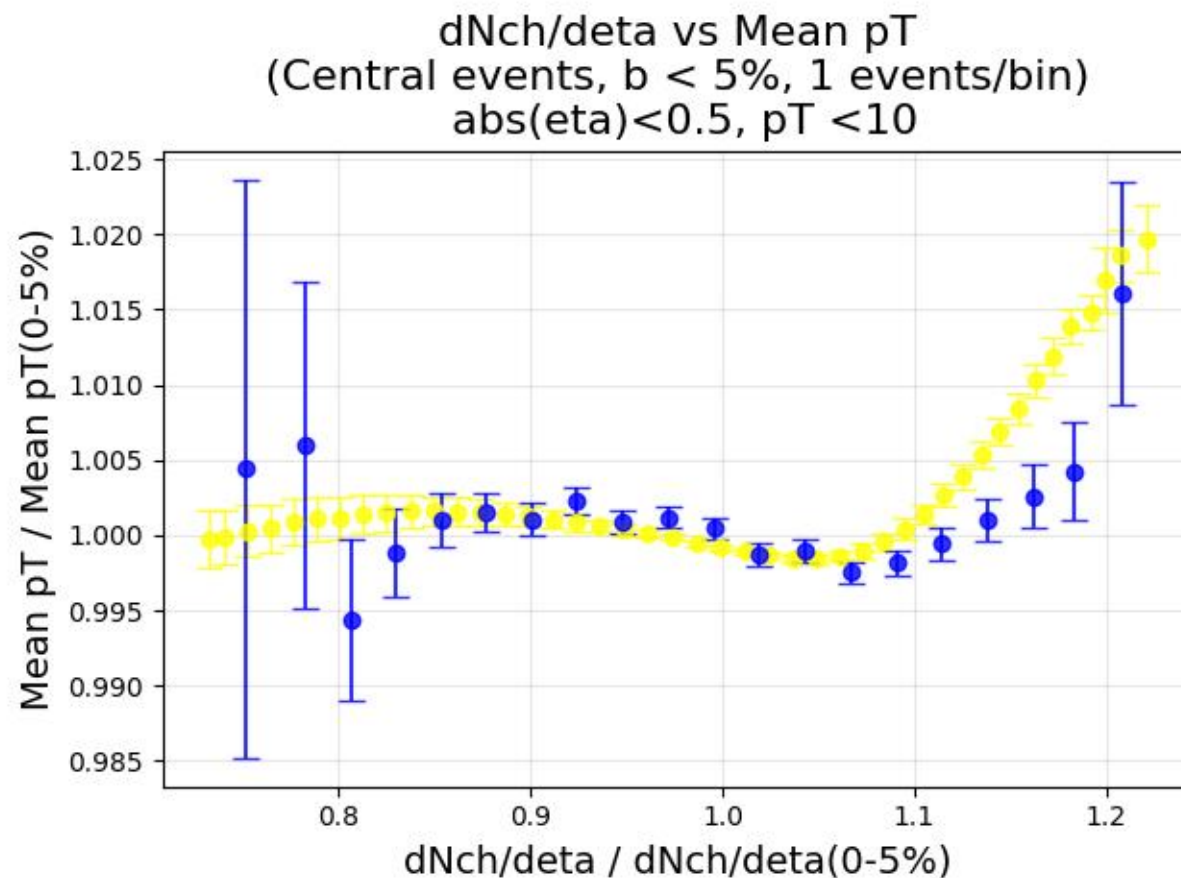
- 2401.06896
- 右上是理论图示和公式;
- 右下是CMS数据和TRAJECTUM模型的计算结果。



- track cut:
- $-0.5 < \eta < 0.5$
- $0.15 < p_T < 10$
- 红点是前几页的CMS的图上, 从hepdata上找到的点。
- 蓝点是hic模型下的。



- track cut:
- $0.5 < \text{abs}(\eta) < 0.8$
- $0.15 < p_T < 10$
- 黄点是LHC的, 从hepdata上找到的点。
- 蓝点是hic模型下的。





Input parameter

- 第一个参数norm影响的是多重数。
- 在treno模型的计算中:
- `auto t = norm_ * gen_mean(TA_[iy][ix], TB_[iy][ix]);`
- `//T是A和B两个核的participant thickness function`（具体在接下来两页有解释）
- `TR_[iy][ix] = t;`
- `multiplicity_ = dxy_ * dxy_ * sum;` `// sum是TR_所有元素的和`

Input parameter

- 第二个参数 p
- 约化厚度定义为参与者核厚度的广义平均值

`-p, --reduced-thickness FLOAT`

Reduced thickness parameter p . The reduced thickness is defined as the **generalized mean** of participant nuclear thickness

$$T_R(p; T_A, T_B) = \left(\frac{T_A^p + T_B^p}{2} \right)^{1/p}$$

The default is $p = 0$, which corresponds to the geometric mean.

Input parameter

- 第三个参数k
- 也和treno模型中使用到的约化厚度有关。

- k是gamma分布的参数:

$$P_k(x) = \frac{k^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-kx}$$

- participant thickness function: $\tilde{T}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{\text{part}}} \gamma_i T_p(x - x_i, y - y_i),$

- 第四个参数就是核的Gaussian分布的参数: $T_p(x, y) = \frac{1}{2\pi w^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right)$

Input parameter

- 第五到七个参数:

$$(\eta/s)(T) = \begin{cases} (\eta/s)_{\min} + (\eta/s)_{\text{slope}}(T - T_c) & T > T_c \\ (\eta/s)_{\text{hrg}} & T \leq T_c \end{cases}$$

- η : 剪切黏度 (shear viscosity), 描述流体层之间相对运动时的摩擦。
- 黏滞系数与熵密度的比值 η/s : 无量纲。
- 理想流体: $\eta/s \rightarrow 0$
- 高黏性流体: η/s 很大
- QGP 在强相互作用下, 被认为接近完美流体, η/s 很小。

Input parameter

- 在高温极限（接近自由夸克-胶子气体）， η/s 应该随温度上升而增大（流体变“稀薄”，更容易滑动）。
- 在低温强子相（HRG）， η/s 较大。
- 因此 $\eta/s(T)$ 通常在相变温度 T_c 附近最小，类似一个“V 型曲线”。
- 但是这个不能直接测量。于是只能比较模拟与实验数据来间接约束。

Input parameter

- 第八个参数: $(\zeta/s)_{\text{norm}}$ 用来缩放右边的函数。
- ζ : 体黏度。描述体积膨胀/压缩时的阻力。
- 在 conformal (尺度不变) 理论里 $\zeta=0$ 。
- 但在 QCD 中, 在 T_c 附近尺度对称性被强烈破坏 $\rightarrow \zeta/s$ 在 T_c 附近会出现一个峰值。
- 在远离 T_c 的低温/高温区, ζ/s 较小。

$$(\zeta/s)(T) = \begin{cases} C_1 + \lambda_1 \exp[(x-1)/\sigma_1] \\ \quad + \lambda_2 \exp[(x-1)/\sigma_2] & T < T_a \\ A_0 + A_1 x + A_2 x^2 & T_a \leq T \leq T_b, \\ C_2 + \lambda_3 \exp[-(x-1)/\sigma_3] \\ \quad + \lambda_4 \exp[-(x-1)/\sigma_4] & T > T_b \end{cases}$$

with $x = T/T_0$ and coefficients

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.03, & C_2 &= 0.001, \\ A_0 &= -13.45, & A_1 &= 27.55, & A_2 &= -13.77, \\ \sigma_1 &= 0.0025, & \sigma_2 &= 0.022, & \sigma_3 &= 0.025, & \sigma_4 &= 0.13, \\ \lambda_1 &= 0.9, & \lambda_2 &= 0.22, & \lambda_3 &= 0.9, & \lambda_4 &= 0.25, \\ T_0 &= 0.18 \text{ GeV}, & T_a &= 0.995 T_0, & T_b &= 1.05 T_0. \end{aligned}$$

- 观测量 v_2 、 v_3 、 v_4 ：对 η/s 非常敏感。 η/s 越大，流体内部摩擦越强 $\rightarrow$ 各向异性流衰减 $\rightarrow v_n$ 变小。
- mean p_T 和 dN/dy ：对 ζ/s 和 T_{switch} 更敏感。 ζ/s 大 $\rightarrow$ 膨胀阻力大 $\rightarrow$ mean p_T 下降。
- 贝叶斯推断框架
- 先用一大批参数点跑模拟，得到观测量分布
- 与实验数据比较
- 用 MCMC 得到参数的后验分布，从统计意义上给出 $\eta/s(T)$ 、 $\zeta/s(T)$ 的范围和形状。

Input parameter

- 第九个参数是上一页讲的 T_{switch} 。强子化的温度。

Gaussian process emulators

- 使用PCA（主成分分析）将输出转换为少数几个主成分 Z $Z = \sqrt{m} Y U$
- 每个主成分分别用高斯过程模拟，再转换回物理空间： $Y_* = \frac{1}{\sqrt{m}} Z_* U^\top$