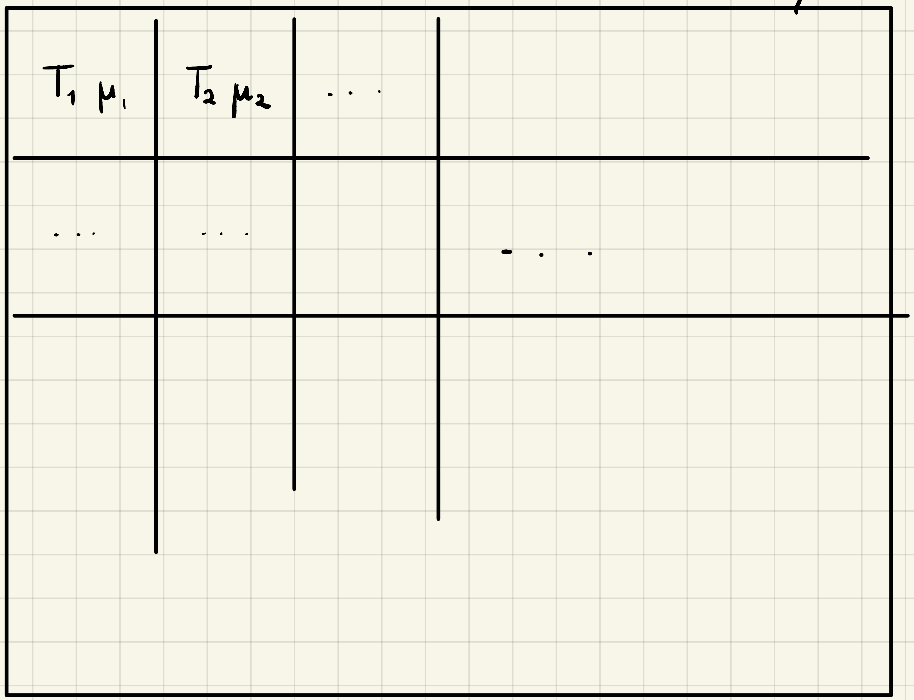
Equilibrio termodinamico locale

Equilibrio termodinamico locale

E' una nozione molto importante

Localmente si ha un sistema termodinamico equilibrato



Condizione di esistenza

$$\lambda_{micro} \ll \frac{T}{\left(\frac{dT}{dx}\right)}, \frac{\mu}{\left(\frac{d\mu}{dx}\right)} \quad \text{ecc.}$$

$\lambda_{micro} \longrightarrow \lambda_{interazione}$ es.

libero cammino medio $\lambda = \dfrac{1}{n\sigma}$

Equilibrio: entropia 1 max. con vincoli $E, \underline{P}, Q, \ldots$ cella 1 +

entropia 2 max. con vincoli $E, \underline{P}, Q, \ldots$ cella 2 +

ecc. ecc.

EQUILIBRIO <u>LOCALE</u>: massimo dell'entropia totale con vincoli sulle

<u>densità</u> delle grandezze conservate

Dato che i vari vincoli sono indipendenti si può sommare e scrivere

$$F[\hat{\rho}] = -\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\log\hat{\rho}) - \int d^3x \frac{1}{T(\underline{x})}\left[\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\,\hat{\varepsilon}(\underline{x})) - \varepsilon_0(\underline{x})\right] + \int d^3x \frac{\underline{v}(\underline{x})}{T(\underline{x})}\cdot\left[\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\,\hat{\underline{\pi}}(\underline{x})) - \underline{\pi}_0(\underline{x})\right]$$

dove $\varepsilon_0(\underline{x})$ è la densità di energia e $\underline{\pi}(\underline{x})$ la densità di impulso.

Vincoli $\quad \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\,\hat{\varepsilon}(x)) = \varepsilon_0(\underline{x}) \qquad \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\,\hat{\underline{\pi}}(\underline{x})) = \underline{\pi}_0(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x}$

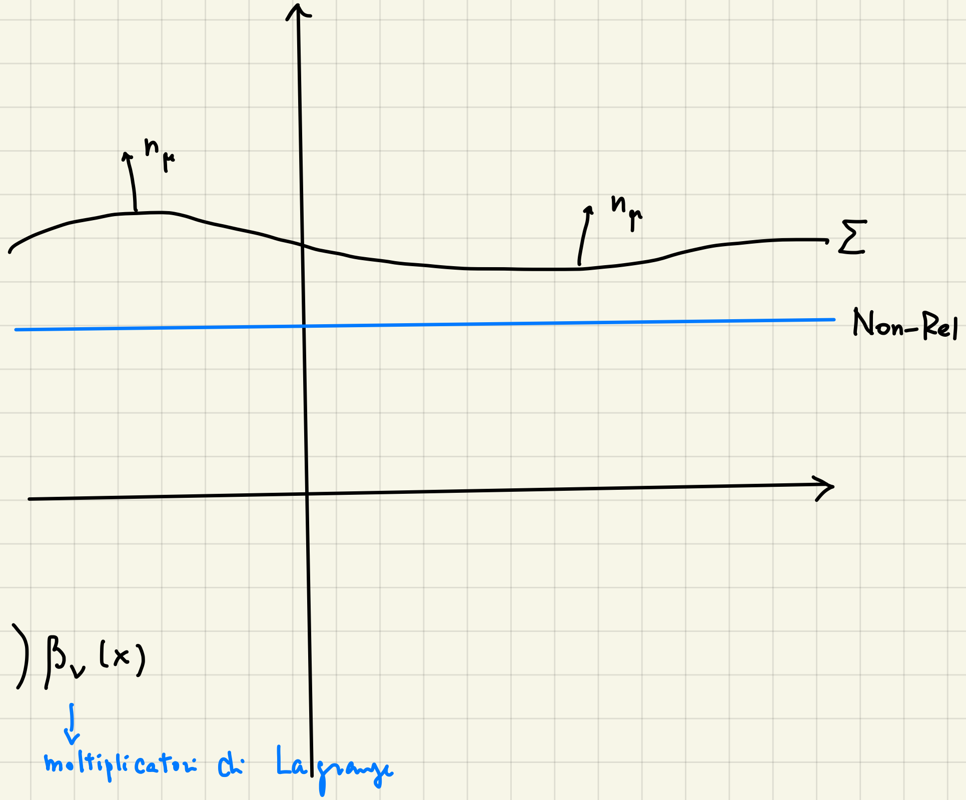
La soluzione è:

$$\hat{\rho} = \exp\left[-\int d^3x \frac{1}{T(\underline{x})}\hat{\varepsilon}(\underline{x}) + \int d^3x \frac{\underline{v}(\underline{x})}{T(\underline{x})}\cdot\hat{\underline{\pi}}(\underline{x})\right]\frac{1}{Z}$$

a cui eventualmente si possono aggiungere i vincoli sulle densità di carica.

Questa formulazione è quella non-relativistica.

Nella formulazione relativistica c'è un ingrediente importante in più: la ipersuperficie Σ sulla quale definire l'equilibrio locale



Vincoli

$$n_\mu \, \mathrm{Tr}\left(\hat\rho \, \hat T^{\mu\nu}(x)\right) = n_\mu T_0^{\mu\nu}(x)$$

$$\forall x \in \Sigma$$

$$F[\hat\rho] = -\mathrm{Tr}\left(\hat\rho \log\hat\rho\right) - \int d\Sigma_\mu \left[\mathrm{Tr}\left(\hat\rho \, \hat T^{\mu\nu}(x)\right) - T_0^{\mu\nu}(x)\right) \beta_\nu(x)$$

moltiplicatori di Lagrange

$$\hat\rho_{LE} = \frac{1}{Z} e^{-\int_\Sigma d\Sigma_\mu \hat T^{\mu\nu}(x) \beta_\nu(x)}$$

$\beta_\nu(x)$ è determinato dalla soluzione dell'equazione vincolare $n_\mu \, \mathrm{Tr}\left(\hat\rho \, \hat T^{\mu\nu}(x)\right) = n_\mu T_0^{\mu\nu}(x)$

Se c'è anche una corrente conservata

$$\hat{\rho}_{LE} = \frac{1}{Z} e^{-\int_\Sigma d\Sigma_\mu \left(\hat{T}^{\mu\nu} \beta_\nu - \zeta \hat{j}^\mu \right)}$$

ulteriore vincolo $n_\mu \mathrm{Tr}(\hat{\rho} \hat{j}^\mu(x)) = j_0^\mu(x)$

L'operatore $\hat{\rho}_{LE}$ dipende dal tempo, o meglio, dipende da Σ! L'unico caso in cui non vi dipende è quando l'integrando ha divergenza zero.

Se voglio sapere come varia l'entropia nel tempo $S = -\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_{LE} \log \hat{\rho}_{LE})$ devo allora specificare un "tempo" ovvero una famiglia di ipersuperfici sulle quali $\hat{\rho}_{LE}$ è costruito

Si può specificare una famiglia di ipersuperfici 3D attraverso un campo normale $n^\mu(x)$ di tipo tempo.

Tuttavia, questo non può essere del tutto arbitrario. Se infatti descriviamo la famiglia delle Σ normali con le coordinate $\tau\ \sigma^1 \sigma^2 \sigma^3$ allora una Σ è individuata da $\tau(x) =$ costante e

$$n_\mu(x) = \lambda(x) \partial_\mu \tau .$$

Ma allora $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu n_\rho n_\sigma = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu(\lambda\partial_\rho\tau)\lambda\partial_\sigma\tau = 0$ $\quad$ n campo a vorticità nulla

OSSERVAZIONE

La Σ su cui definire l'equilibrio locale deve essere una ipersuperficie 3D di tipo spazio, affinché abbiano un significato proprio le densità di energia e impulso $n_\mu T^{\mu\nu}$.

Può capitare di dover definire l'equilibrio locale su Σ che non è, o è solo parzialmente di tipo spazio.

In tal caso, occorre specificare un vettore di tipo tempo su Σ che permetta di esprimere il vincolo. Questo può essere per esempio β stesso (frame termometrico, lezione 11)

$$\beta_\mu T^{\mu\nu} = \beta_\mu T^{\mu\nu}_{LE}[\beta, n, \zeta]$$

Entropia

$$S = -\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_{LE} \log \hat{\rho}_{LE}\right) \qquad \hat{\rho}_{LE} = \frac{1}{Z_{LE}} \exp\left[-\int_{\Sigma_\tau} d\Sigma\, n_\mu \left(\hat{T}^{\mu\nu}\beta_\nu - \zeta \hat{j}^\mu\right)\right]$$

$$S = \log Z_{LE} + \int_{\Sigma_\tau} d\Sigma\, n_\mu \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_{LE}\hat{T}^{\mu\nu}\right)\beta_\nu - \zeta\, \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_{LE}\hat{j}^\mu\right)$$

La dimostrazione del caso globale dell'estensività può essere estesa facilmente

$\log Z_{LE}$ può essere scritta come $\int_{\Sigma_\tau} d\Sigma_\mu \phi^\mu - \langle 0|\hat{\Upsilon}|0\rangle$ con $\hat{\Upsilon} = \int d\Sigma_\mu \hat{T}^{\mu\nu}\beta_\nu - \zeta \hat{j}^\mu$

e, detti $T^{\mu\nu}_{LE} \equiv \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_{LE}\hat{T}^{\mu\nu}\right) - \langle 0|\hat{T}^{\mu\nu}|0\rangle$ e $j^\mu_{LE} = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_{LE}\hat{j}^\mu\right) - \langle 0|\hat{j}^\mu|0\rangle$

si ha $\quad \phi^\mu = \int_1^\infty d\lambda\, T^{\mu\nu}_{LE}(\lambda)\beta_\nu - j^\mu_{LE}(\lambda)\zeta$

$$\Rightarrow \qquad S = \int_{\Sigma_\tau} d\Sigma_\mu \left(\phi^\mu + T^{\mu\nu}_{LE}\beta_\nu - \zeta j^\mu_{LE}\right)$$

DIPENDENZA DI s^μ DA n^μ

Se volessimo esprimere S come un integrale di una corrente su una ipersuperficie qualsiasi, vorremmo che s^μ fosse un campo obiettivo. Cioè vorremmo che s^μ fosse come una corrente j^μ, la quale è ottenuta come il valore medio di un operatore.

In realtà s^μ dipende dalla ipersuperficie Σ o dalla foliazione definita dal campo $n^\mu(x)$ perché sia $T^{\mu\nu}_{LE}$, j^μ_{LE} (ovvio) che β, ζ tramite le equazioni vincolari vi dipendono.

$$n_\mu T^{\mu\nu} = n_\mu T^{\mu\nu}_{LE}[\beta, \zeta, n]$$

$$n_\mu j^\mu = n_\mu j^\mu_{LE}[\beta, \zeta, n]$$

Dunque dovremmo scrivere

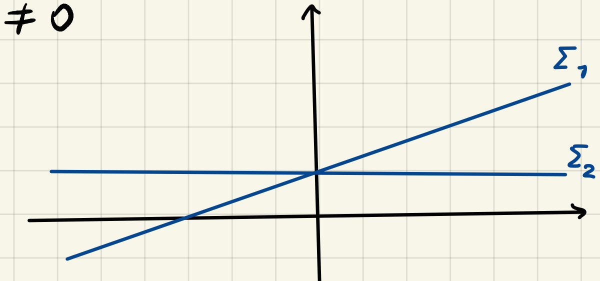
$$s^\mu_{(n)} = \phi^\mu_{(n)} + T^{\mu\nu}_{LE}\beta_{\nu(n)} - \zeta_{(n)} j^\mu_{LE}$$

e $\quad S = \int_\Sigma d\Sigma_\mu s^\mu_{(n)}$ avrebbe una "doppia" dipendenza da Σ

Osservazione

In generale $\quad \partial_\mu s^\mu \neq 0 \quad$ perché $\quad \partial_\mu \beta_\nu + \partial_\nu \beta_\mu \neq 0 \quad$ e $\quad \partial_\mu \zeta \neq 0$

$\Rightarrow$ S dipende da Σ, al contrario che all' equilibrio globale



$$\int_{\Sigma_1} d\Sigma\, s^\mu_{(n)} \neq \int_{\Sigma_2} d\Sigma_\mu\, s^\mu_{(n)}$$

Si può attenuare la dipendenza di s^μ da n definendo

$$\boxed{s^\mu = \phi^\mu + T^{\mu\nu}\beta_{\nu(n)} - \zeta_{(n)} j^\mu}$$

$$\phi^\mu = \int_1^\infty d\lambda \; T^{\mu\nu}(\lambda)\beta_\nu - j^\mu(\lambda)\zeta$$

Cioè sostituendo $T^{\mu\nu}_{LE}$ con $T^{\mu\nu}$ e j^μ_{LE} con j nella definizione sia di s^μ che di ϕ^μ.

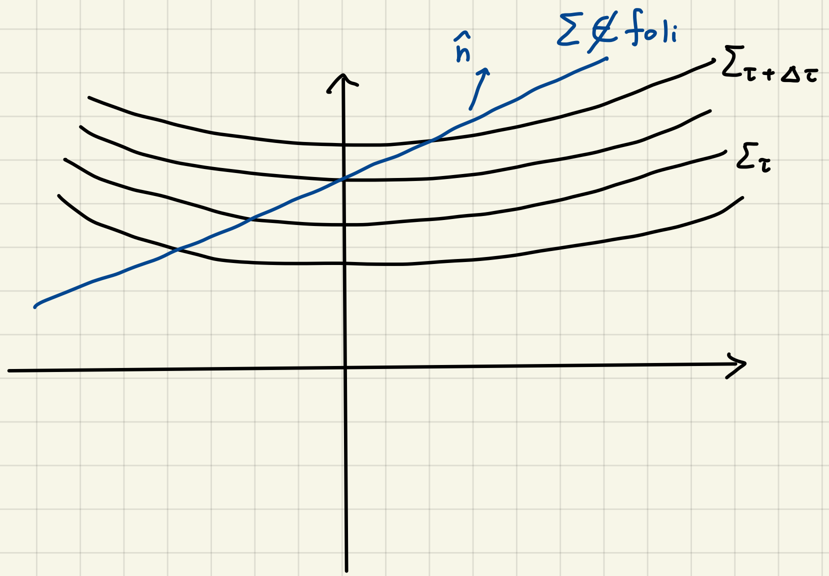
In questo modo si preserva l' equazione

$S = -\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_{LE} \log \hat{\rho}_{LE}) = \int_\Sigma d\Sigma_\mu\, s^\mu$ rispetto alla definizione precedente, se Σ appartiene alla foliazione definita da n^μ, dato che $n_\mu T^{\mu\nu} = n_\mu T^{\mu\nu}_{LE}$ e $n_\mu j^\mu = n_\mu j^\mu_{LE}$

ma la si estende anche a ipersuperfici $\Sigma \notin$ foliazione perchè risulterà anche per esse

$$\int_\Sigma d\Sigma_\mu\, s^\mu = -\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_{LE}(\Sigma)\log\hat{\rho}_{LE}(\Sigma)\right)$$

dove S^μ è la stessa di prima!



Resta tuttavia la dipendenza di β e ζ dalla foliazione e non la si può togliere

Il problema della scelta di Σ_τ di equilibrio locale attuale, dato il punto x, è equivalente a scegliere un sistema di osservatori locali che si muovono con quadrivelocità n^μ, ed è perciò anche definibile come <u>problema del frame</u>

La domanda che ci si può porre è se esiste una Σ o una famiglia di Σ, o analogamente un campo n, <u>privilegiato</u>, come c'è nel caso non-relativistico (iperpiani)

RELAZIONI DELLE DENSITÀ TERMODINAMICHE

Le relazioni tra densità viste da osservatori si ottengono proiettando i campi vettoriali sulle quadrivelocità che definiscono il loro asse temporale. Se parliamo della famiglia di osservatori definiti da n:

$$S^\mu \cdot n_\mu \equiv s = n \cdot \phi + n_\mu T^{\mu\nu} \beta_\nu - \zeta n_\mu j^\mu$$

Tuttavia, la relazione che intercorre tra s, densità di energia e densità di carica non è banale.

$$\beta = (n \cdot \beta) n + \beta_T \qquad \text{con} \quad \beta_T \cdot n = 0 \qquad \text{e} \quad \text{avremo}$$

$$s \cdot n = n \cdot \phi + \underbrace{(n \cdot \beta)}_{1/T_T} \underbrace{n_\mu T^{\mu\nu} n_\nu}_{\rho} - \zeta \underbrace{q}_{j \cdot n \text{ densità di carica}} + n_\mu T^{\mu\nu} \beta_{T\nu}$$

Il termine $n_\mu T^{\mu\nu} \beta_{\nu_T}$ sparisce solo se $\underset{\text{frame } \beta}{\beta \parallel n}$ oppure $\underset{\text{Landau}}{T^{\mu\nu} n_\mu \propto n_\nu} \Rightarrow n \cdot \beta_T = 0$

Tuttavia, il frame β o termodinamico presenta altri vantaggi.

PRODUZIONE DI ENTROPIA

$$S_{\Sigma_{\tau+d\tau}} - S_{\Sigma_\tau}$$

e $\dfrac{dS}{d\tau}$

PREMESSA Consideriamo $\Sigma_{\tau+d\tau}$ arbitraria, non necessariamente una ipersuperficie $\perp$ n da cui dipendono β, ζ, ϕ

Inoltre la dipendenza di β, ζ, ϕ da n è sottintesa

In questo modo $\xi^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ è totalmente arbitrario e non legato a n^μ

$$S_\Sigma = \int d\Sigma_\mu \left(\phi^\mu + T^{\mu\nu}\beta_\nu - \zeta j^\mu\right) \longrightarrow \text{domain derivative} \quad \frac{\int_{\Sigma_{\tau+d\tau}} - \int_{\Sigma_\tau}}{d\tau} = \mathcal{L}_\xi \left(\int d\Sigma_\mu \dots\right)$$

$$\xi = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Dobbiamo calcolare in effetti:

$$\mathcal{L}_\xi \left(\int d\Sigma_\mu s^\mu\right) = \int d\Sigma_\mu \xi^\mu \, \nabla \cdot s \quad \text{se il flusso al bordo} \int d\tilde{S}_{\mu\nu}\left(s^\mu \xi^\nu - s^\nu \xi^\mu\right) = 0$$

La cosa più difficile da calcolare è $\mathcal{L}_\xi \left(\int d\Sigma_\mu \phi^\mu\right)$

Dato che $\log Z_{LE} = \int d\Sigma_\mu \phi^\mu - \int d\Sigma_\mu \langle 0 | \hat{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle \beta_\nu$ (vedi lezione 7)

$$\mathcal{L}_\xi \left(\int d\Sigma_\mu \phi^\mu - \int d\Sigma_\mu \langle 0|\hat{T}^{\mu\nu}|0\rangle \beta_\nu \right) = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\log Z_{\Sigma(\tau+\Delta\tau)} - \log Z_{\Sigma(\tau)}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{Z_{\Sigma(\tau+\Delta\tau)} - Z_{\Sigma(\tau)}}{\Delta\tau} \frac{1}{Z_{\Sigma(\tau)}}$$

Poniamo per semplicità $\zeta = 0$, la generalizzazione a $\zeta \neq 0$ è molto semplice

$$Z_{\Sigma(\tau+\Delta\tau)} = \mathrm{Tr}\left(e^{-\int_{\Sigma(\tau+\Delta\tau)} d\Sigma_\mu \hat{T}^{\mu\nu}\beta_\nu} \right) \cong \mathrm{Tr}\left(e^{-\int_{\Sigma(\tau)} d\Sigma_\mu \hat{T}^{\mu\nu}\beta_\nu - \Delta\tau \int_{\Sigma(\tau)} d\Sigma\cdot\xi\, \nabla_\mu \left(\hat{T}^{\mu\nu}\beta_\nu \right)} \right) \text{ se } \int d\tilde{S} = 0$$

$$\cong Z_{\Sigma(\tau)} - \Delta\tau\, \mathrm{Tr}\left(e^{-\int\dots} \int d\Sigma\cdot\xi \;\nabla_\mu \left(\hat{T}^{\mu\nu}\beta_\nu \right) \right)$$

Ora divido per Z e ho

$$\frac{1}{Z_{LE}} \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{Z_{LE}(\tau+\Delta\tau) - Z_{LE}(\tau)}{\Delta\tau} = \mathcal{L}_\xi \left(\log Z_{LE} \right) = -\int d\Sigma\cdot\xi \;\; \langle \hat{T}^{\mu\nu} \rangle_{LE} \nabla_\mu \beta_\nu$$

$$= -\int d\Sigma\cdot\xi \left(T^{\mu\nu}_{LE} + \langle 0|\hat{T}^{\mu\nu}|0\rangle \right) \nabla_\mu \beta_\nu$$

D'altronde

$$\mathcal{L}_\xi (\log Z_{LE}) = \mathcal{L}_\xi \left(\int d\Sigma_\mu \phi^\mu - \int d\Sigma_\mu \langle 0 | \hat{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle \beta_\nu \right) = \int d\Sigma \cdot \xi \, \nabla \cdot \phi - \int d\Sigma_\mu \langle 0 | \hat{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle \nabla_\mu \beta_\nu$$

se $\int d\tilde{S} = 0$

Confrontando le due equazioni si ottiene, dato che deve valere $\forall \xi^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

$$\nabla \cdot \phi = - T^{\mu\nu}_{LE} \nabla_\mu \beta_\nu$$

più in generale

$$\boxed{\nabla \cdot \phi = - T^{\mu\nu}_{LE} \nabla_\mu \beta_\nu + j^\mu_{LE} \nabla_\mu \zeta}$$

Consideriamo $s^\mu = \phi^\mu + T^{\mu\nu} \beta_\nu - \zeta j^\mu$

Allora $\nabla \cdot s = \nabla \cdot \phi + T^{\mu\nu} \nabla_\mu \beta_\nu - j^\mu \nabla_\mu \zeta = (T^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}_{LE}) \nabla_\mu \beta_\nu + (j^\mu - j^\mu_{LE}) \nabla_\mu \zeta$

$$\boxed{\nabla \cdot s = (T^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}_{LE}) \nabla_\mu \beta_\nu + (j^\mu - j^\mu_{LE}) \nabla_\mu \zeta}$$