

Form factors in D semileptonic decays by Lattice QCD

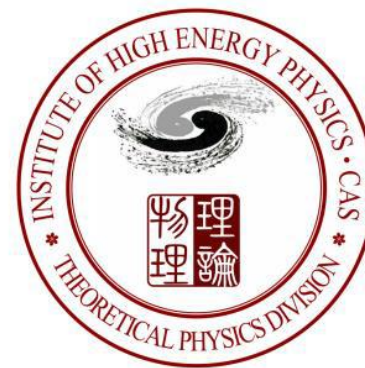
刘朝峰

高能物理研究所

liuzf@ihep.ac.cn

2025年超级陶粲装置研讨会

湖南科技大学，湘潭， 2025.07.02-06



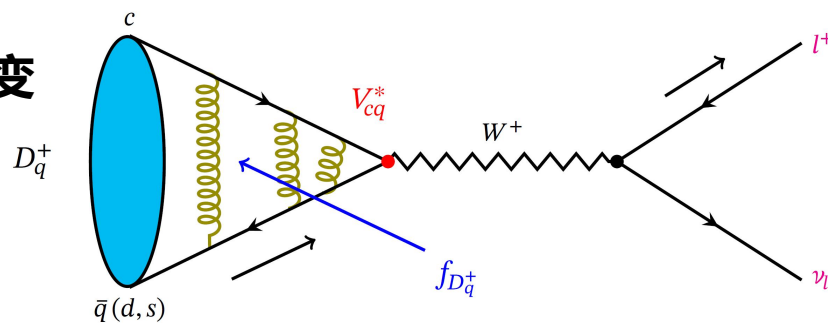
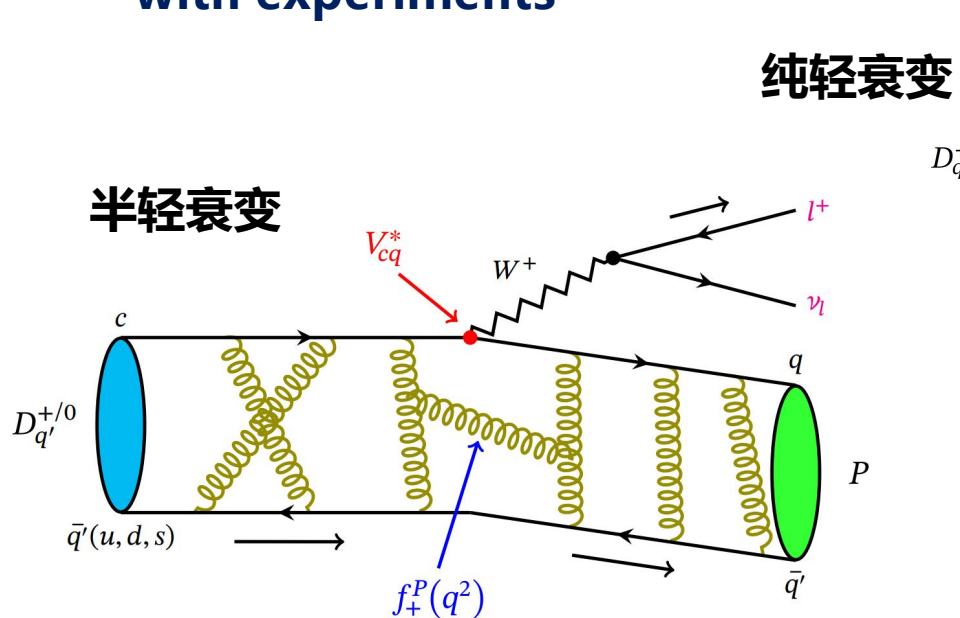
提纲

- 粲物理与格点QCD
- D介子形状因子（半轻过程）
 - $D \rightarrow Kl\nu$
 - $D_s \rightarrow \phi l\nu$

粵物理与LQCD

- **LQCD can calculate form factors and meson decay constants appearing in weak decays of hadrons**
- **Combined with experiments, they can give us CKM matrix elements**
- **Test the SM (is the CKM matrix unitary?)**
- **Or use V_{ab} from elsewhere to compare QCD/SM results with experiments**

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbf{V}_{ud} & \mathbf{V}_{us} & \mathbf{V}_{ub} \\ \pi \rightarrow \ell \nu & K \rightarrow \ell \nu & B \rightarrow \pi \ell \nu \\ & K \rightarrow \pi \ell \nu & \\ \mathbf{V}_{cd} & \mathbf{V}_{cs} & \mathbf{V}_{cb} \\ D \rightarrow \ell \nu & D_s \rightarrow \ell \nu & B \rightarrow D \ell \nu \\ D \rightarrow \pi \ell \nu & D \rightarrow K \ell \nu & B \rightarrow D^* \ell \nu \\ \mathbf{V}_{td} & \mathbf{V}_{ts} & \mathbf{V}_{tb} \\ B_d \leftrightarrow \bar{B}_d & B_s \leftrightarrow \bar{B}_s & \end{array} \right)$$



例如: $\Gamma(P \rightarrow \ell \nu) = \frac{G_F^2 |V_{q_1 q_2}|^2}{8\pi} f_P^2 m_\ell^2 M_P (1 - \frac{m_\ell^2}{M_P^2})^2$

CKM矩阵元 $\rightarrow$ $|V_{q_1 q_2}|^2$

实验测量 $\rightarrow$ $\Gamma(P \rightarrow \ell \nu)$

LQCD计算 $\rightarrow$ f_P^2

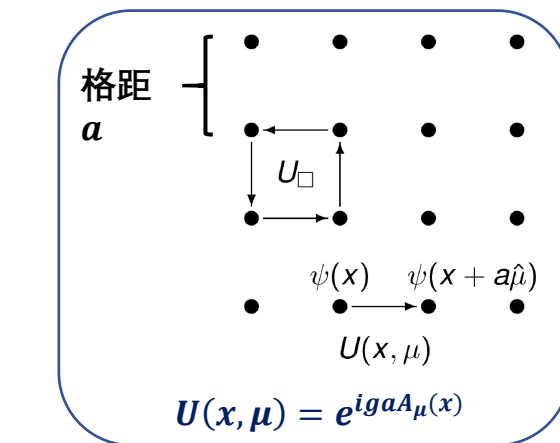
格点QCD (1973, Wilson; 1979, Creutz) 用数值模拟研究QCD的非微扰性质

- 4维闵氏时空 $\rightarrow$ 4维欧氏空间 ($\tau = it$)

$$\langle O \rangle = \frac{\int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \mathcal{O}[A, \bar{\psi}, \psi] e^{-\int \mathcal{L}_{QCD} d^4x}}{\int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi e^{-\int \mathcal{L}_{QCD} d^4x}}, \quad \mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi} \mathbf{M}[A] \psi + \mathcal{L}_G$$

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{D} + m_q$$

$$\langle O \rangle = \frac{\int DU_\mu \mathcal{O}[U, \mathbf{M}^{-1}[U]] \text{Det}[\mathbf{M}[U]] e^{-S_G}}{\int DU_\mu \text{Det}[\mathbf{M}[U]] e^{-S_G}} \sim \frac{\int dx \mathbf{f}(x) \boldsymbol{\rho}(x)}{\int dx \boldsymbol{\rho}(x)} \quad \rightarrow \quad \sim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n)$$



离散的 x_n 按 $\boldsymbol{\rho}(x_n)$ 分布

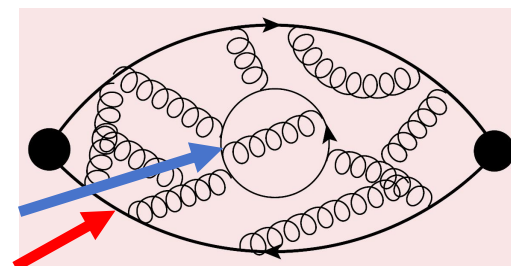
上式为带权重 $\text{Det}[\mathbf{M}[U]] e^{-S_G}$ 的平均，类似Boltzmann系综平均

- 在有限体积4维超立方格子上，自由度个数可数，路径积分具有良好定义
- 巨大高维积分，无法直接计算；用重点抽样按权重分布产生 U (组态)
- 路径积分变为对组态的统计平均: $\langle O \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O_i$

N 有限，统计误差 $\sim 1/\sqrt{N}$

输入若干实验测量值，确定自由参数：
格距 a 和夸克质量 m_q 。预言其他结果

海夸克效应 $\text{Det}[\mathbf{M}[U]]$
价夸克传播子 $\mathbf{M}^{-1}[U]$



介子两点关联函数

粲介子半轻衰变

- $D \rightarrow \pi l \nu$, $D \rightarrow K l \nu$ 可用于确定 $|V_{cd}|$ 和 $|V_{cs}|$

$$\frac{d\Gamma(D \rightarrow K l \nu)}{dq^2} = (\text{known}) |\mathbf{p}_K|^3 |V_{cs}|^2 |f_+^{D \rightarrow K}(q^2)|^2$$

- 非微扰输入量：形状因子 $f_{+/0}(q^2)$

$$\langle K | V^\mu | D \rangle = f_+(q^2) \left(p_D^\mu + p_K^\mu - \frac{m_D^2 - m_K^2}{q^2} q^\mu \right) + f_0(q^2) \frac{m_D^2 - m_K^2}{q^2} q^\mu$$

$$f_+(0) = f_0(0)$$

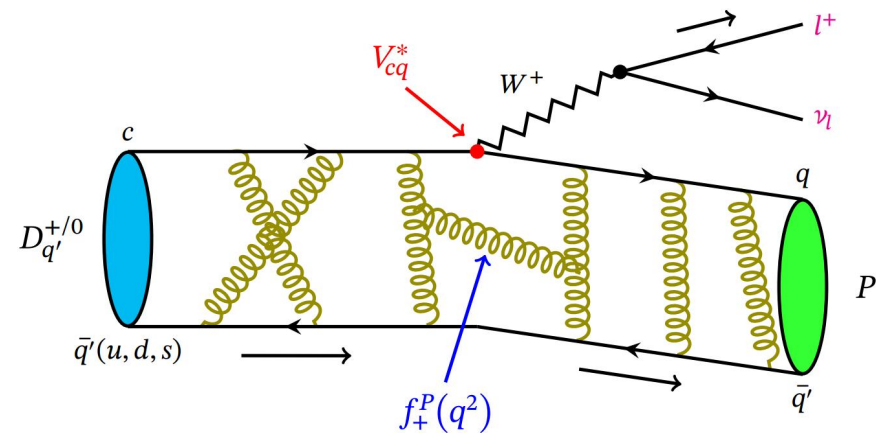
对于 $l = e, \mu$, 形状因子 f_0 对衰变宽度的贡献较小 (正比于 m_l^2)

- 标量流形状因子 $\langle K | S | D \rangle = f_0^{D \rightarrow K}(q^2) \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_c - m_s}$

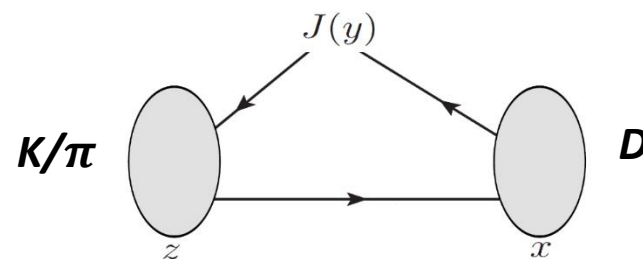
(手征格点费米子有 $Z_S Z_m = 1$, 无需计算重整化常数)

- 初末态强子四动量: p, p'

$q^2 = (p - p')^2$, 格点计算中3-动量取分立值

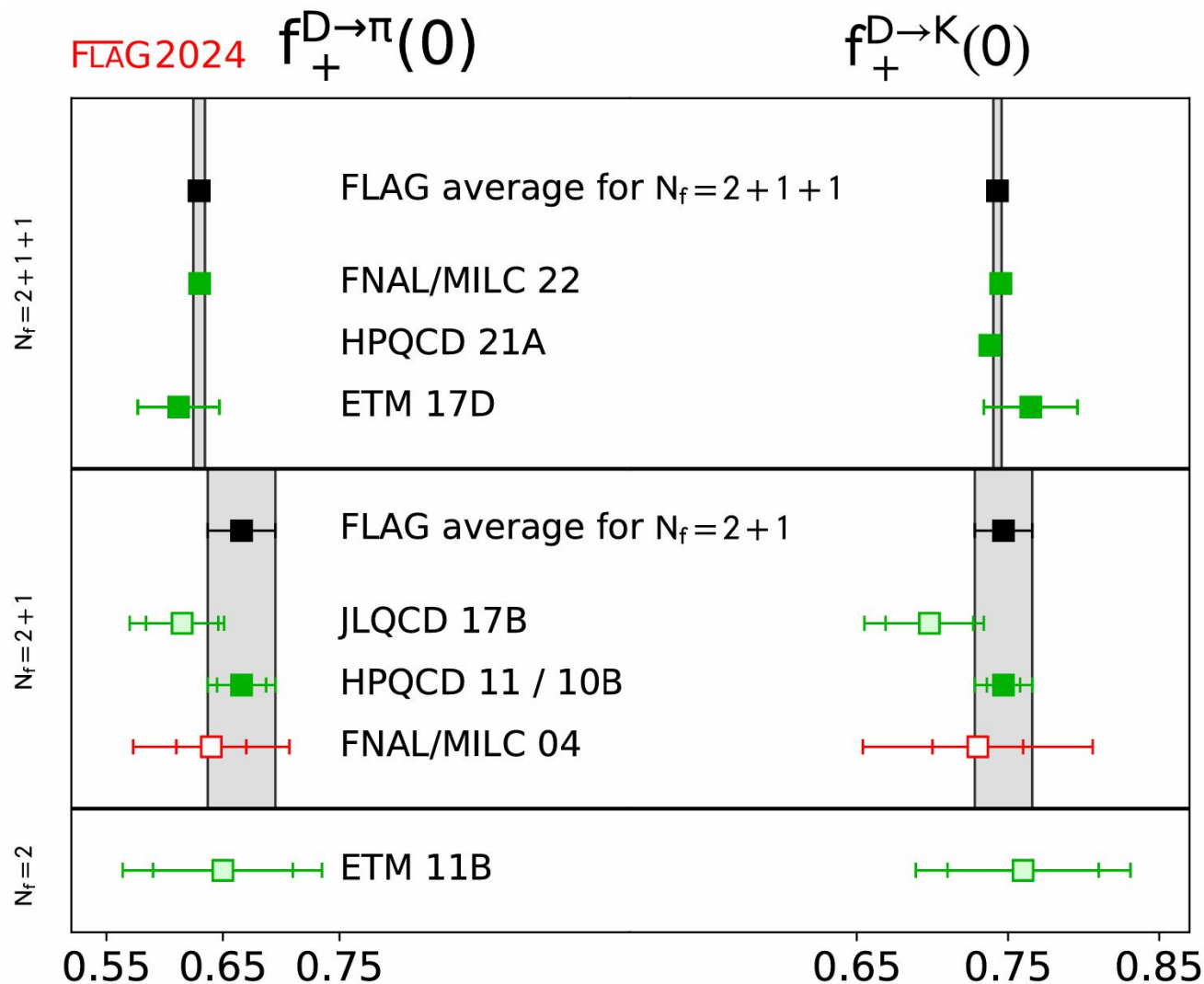


courtesy [arXiv:2103.00908](https://arxiv.org/abs/2103.00908)



三点关联函数

$f_+(q^2 = 0)$ for $D \rightarrow \pi/K$



FLAG Review 2024, arXiv:2411.04268

Results up to 2024.4.30

2+1+1味

- $f_+^{D\pi}(0) = 0.6296(50)$ [ETM 17D: PRD96 (2017) 054514, 1706.03017;
- FNAL/MILC 22: 2212.12648, PRD107.094516]
- $f_+^{DK}(0) = 0.7430(27)$ [ETM 17D: PRD96 (2017) 054514, 1706.03017. HPQCD 21A: PRD104 (2021) 034505, 2104.09883. FNAL/MILC 22: 2212.12648, PRD107.094516]

2+1味

- JLQCD 17: LAT2017 [1711.11235]
- FNAL/MILC/HPQCD 04: 一个格距, m_π 大于 500 MeV
- $f_+^{D\pi}(0) = 0.666(29)$ [HPQCD 11, PRD84,114505, 1109.1501]
- $f_+^{DK}(0) = 0.747(19)$ [HPQCD 10B, PRD82,114506, 1008.4562]

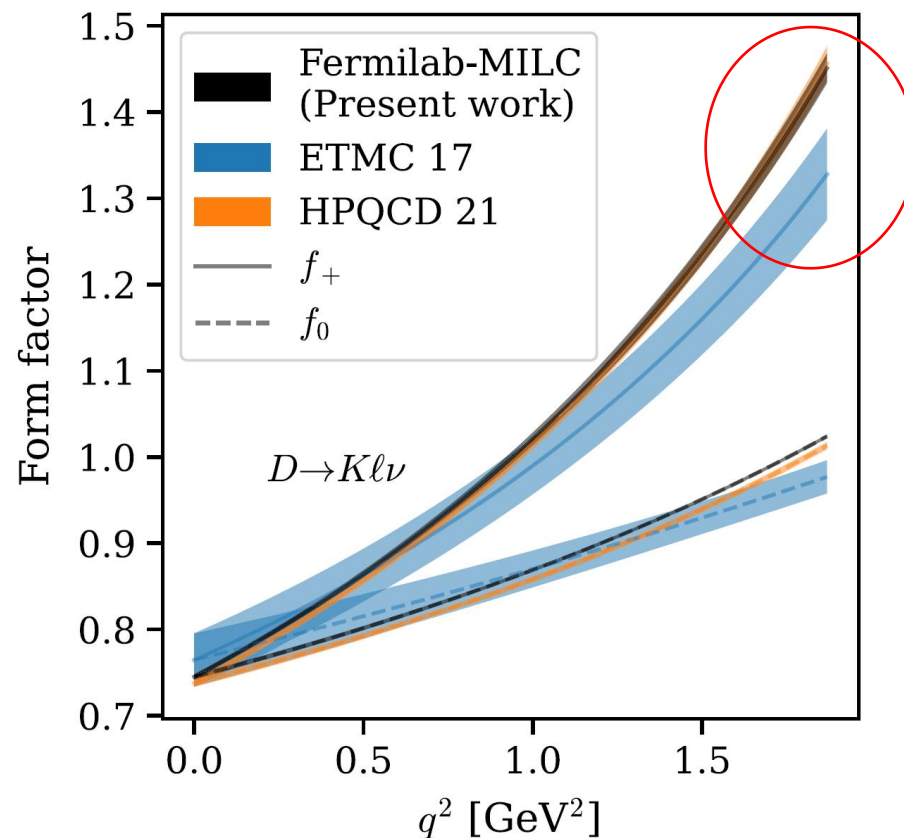
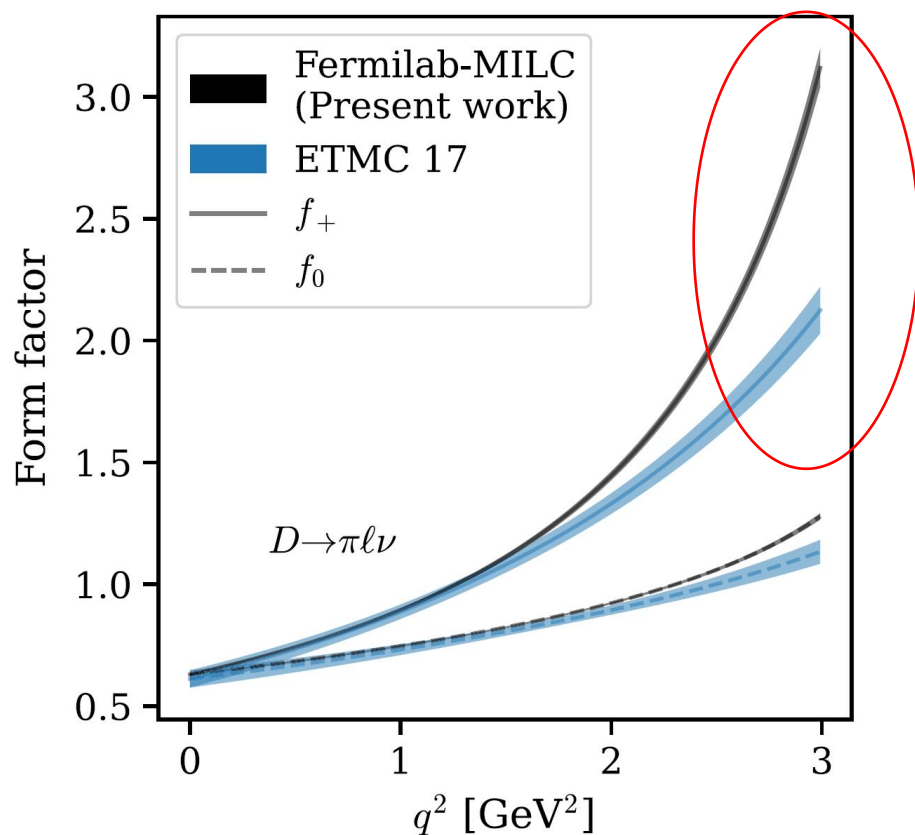
$D \rightarrow \pi/K, D_s \rightarrow K$ 形状因子

- 四个格距: ~ 0.12 fm - 0.04 fm
- $\mathcal{O}(1000)$ 组态数, 多次测量/组态
- 两或三个体积@两个格距
- 物理轻夸克质量@三个格距

Fermilab/MILC, 2+1+1 味 HISQ

A. Bazavov et al., 2212.12648, PRD107.094516

$$\begin{aligned} f_+^{D\pi}(0) &= 0.6300(51) \\ f_+^{DK}(0) &= 0.7452(31) \\ f_+^{D_s K}(0) &= 0.6307(20) \end{aligned}$$

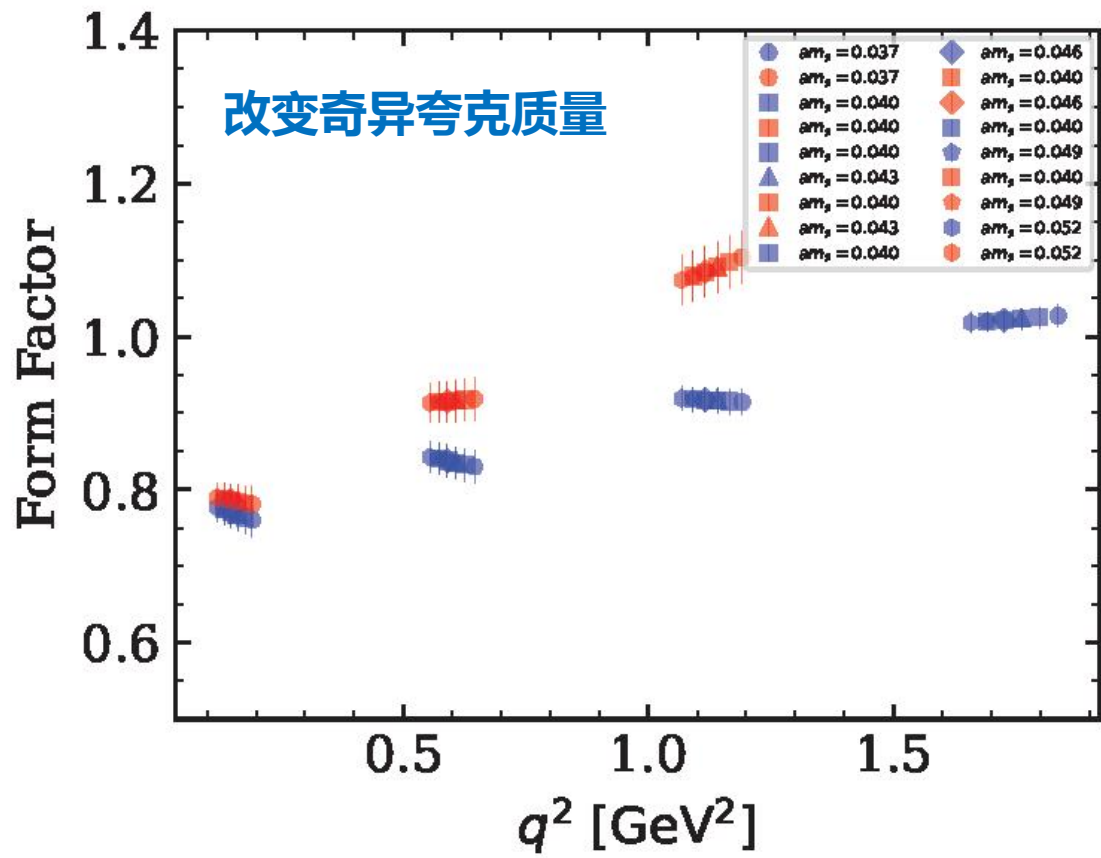
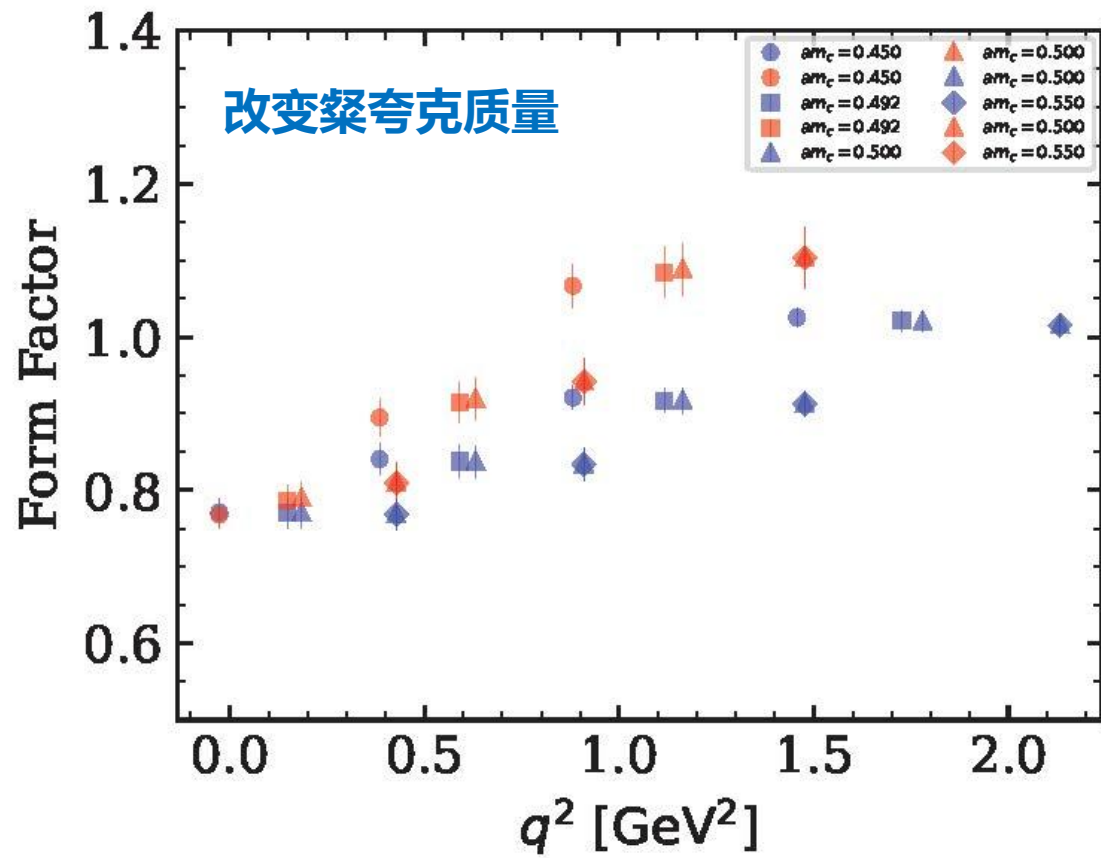


$D \rightarrow K l \nu$ 形状因子 $f_+(q^2)$ 和 $f_0(q^2)$

- 价夸克质量点分别有 4(u/d)、6(s)、4(c)个
- 海夸克质量点3个($m_\pi^{\text{sea}} \approx 302, 360, 412 \text{ MeV}$)
 - f004和f008组态上的计算正在进行
- 内插/外推到物理点

$1/a \text{ (GeV)}$	Label	am_l/am_s	Volume	$N_{\text{conf}} \times N_{\text{src}}$
2.383(9)	f004	0.004/0.03	$32^3 \times 64$	628×1
$(m_\pi^{\text{sea}} \approx 360 \text{ MeV})$	f006	0.006/0.03	$32^3 \times 64$	42×16
	f008	0.008/0.03	$32^3 \times 64$	49×16

RBC-UKQCD, 2+1味组态



$f_+(q^2)$ 和 $f_0(q^2)$ 的参数化及夸克质量依赖

定义:
$$z(q^2; t_0) = \frac{\sqrt{t_+ - q^2} - \sqrt{t_+ - t_0}}{\sqrt{t_+ - q^2} + \sqrt{t_+ - t_0}}$$

- 取 $t_0 = 0$, 此时 $q^2 = 0$ 与 $z = 0$ 对应

$$f_+(q^2; m_c, m_s, m_l) = \frac{1}{1 - q^2/m_{D_s^*}^2} \sum_{i=0}^n a_i D_i z^i$$

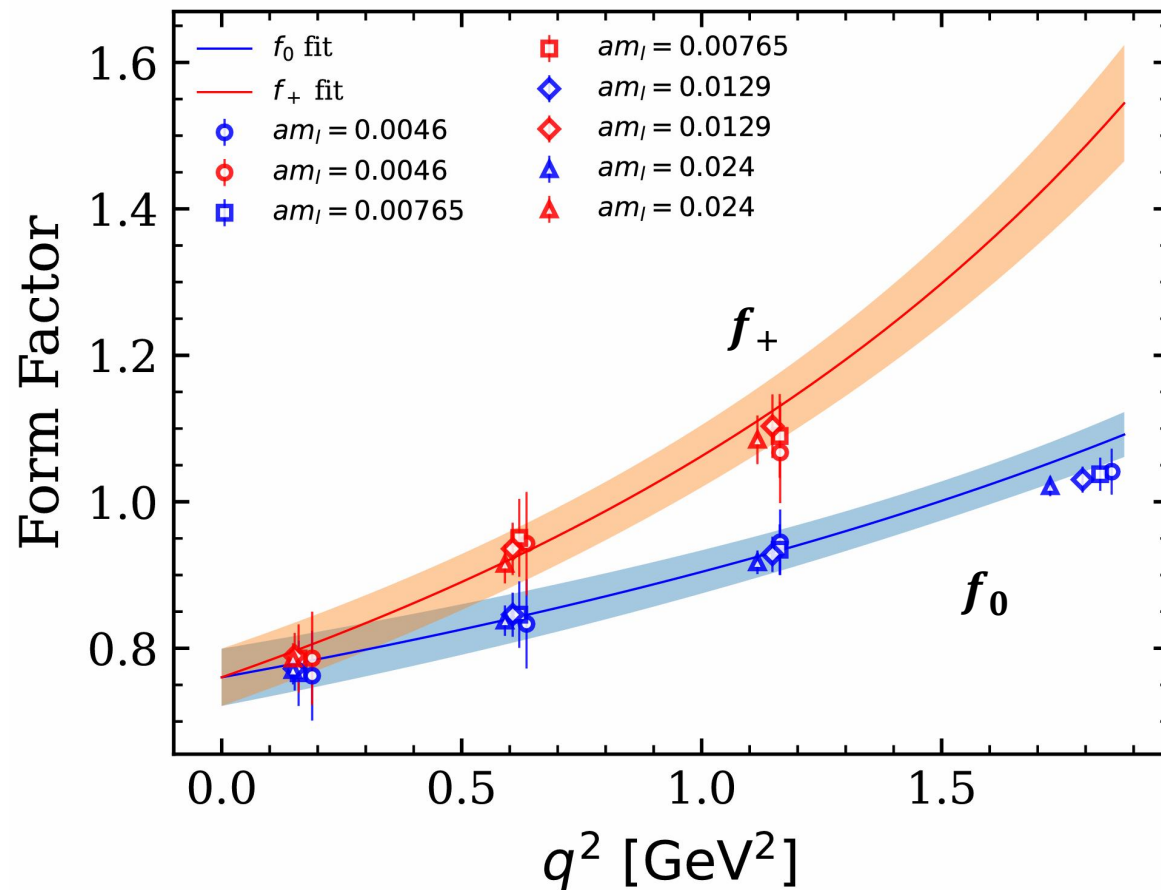
$$f_0(q^2; m_c, m_s, m_l) = \frac{1}{1 - q^2/m_{D_{s0}^*}^2} \sum_{i=0}^n b_i D_i z^i$$

$$D_i = 1 + c_{i1} (m_\pi^2 - (m_\pi^{\text{phys}})^2) + c_{i2} (m_{\eta_s}^2 - (m_{\eta_s}^{\text{phys}})^2) + c_{i3} (m_{J/\psi} - m_{J/\psi}^{\text{phys}})$$

- 拟合参数: $a_i, b_i, c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}$
- $f_+(q^2 = 0) = f_0(0)$
- $m_{D_s^*}, m_{D_{s0}^*}$ 取对应的格点计算结果或实验值
- $m_{D_{s0}^*} = 2.3178 \text{ GeV}$ (PDG)
- 截断到 z 的一次、二次或三次项

2025-7-4 刘朝峰

对于给定的夸克质量, $t_+ \equiv (m_D + m_K)^2$ 用对应的强子质量计算



- At the physical point (valence quark)
 $f_+(0) = f_0(0) = 0.760(39) (n = 1)$

Preliminary results

$D \rightarrow K$ 张量流形状因子 $f_T(q^2)$

“Form factors in semileptonic decay of D mesons” ,T. Shen, Y. Chen, M. Gong, D. Li., K.-F. Liu, **ZL**, Z. Zhang, [arXiv:2503.01219](https://arxiv.org/abs/2503.01219), **PoS LATTICE2024 (2025) 294**

• 张量流形状因子 $\langle P | T_{\mu\nu} | D \rangle = \frac{2}{m_D + m_P} [p_{P\mu} p_{D\nu} - p_{P\nu} p_{D\mu}] f_T(q^2)$

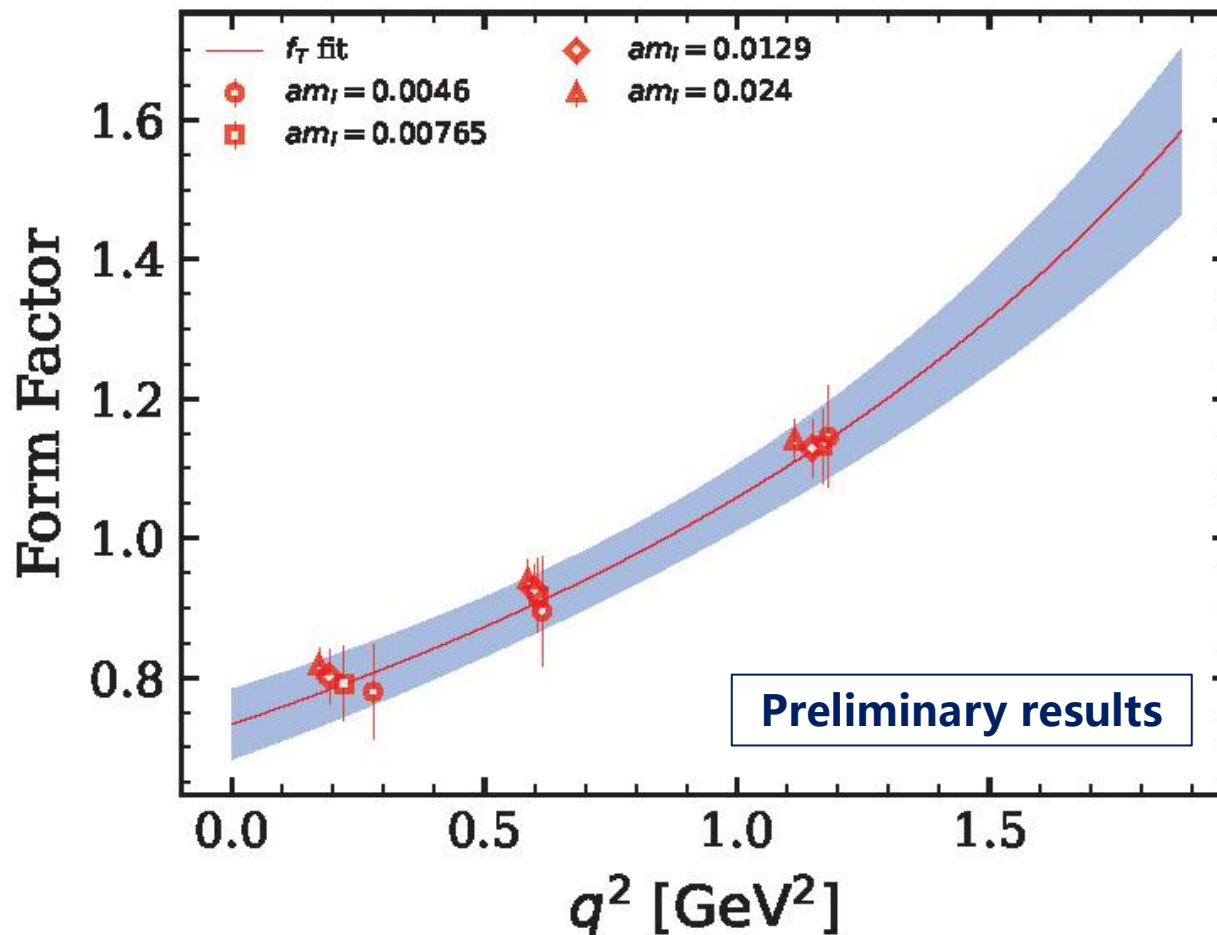
助力新物理寻找

- 以新物理方式影响 $D \rightarrow K/\pi l\nu$
- 影响FCNC稀有过程 $D \rightarrow K/\pi ll$

- At the physical point (valence quark)
 $f_T(0) = 0.733(50) \ (n = 1)$

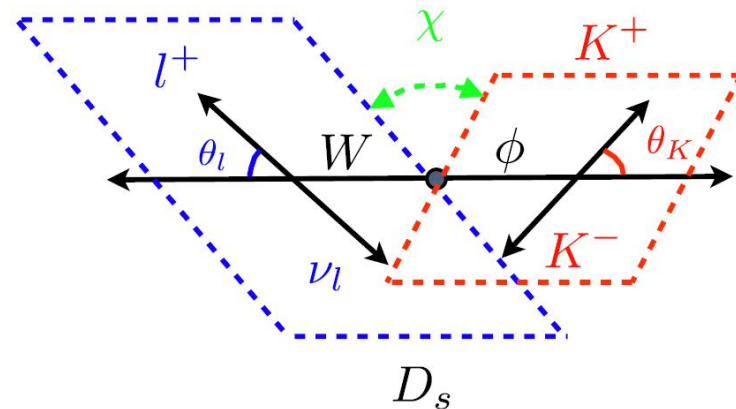
重整化常数: $Z_T^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 1.157(11)$

Y. Bi, ..., **ZL** et al., **PRD108.054506 (2023)**



$D_s \rightarrow \phi l \nu$

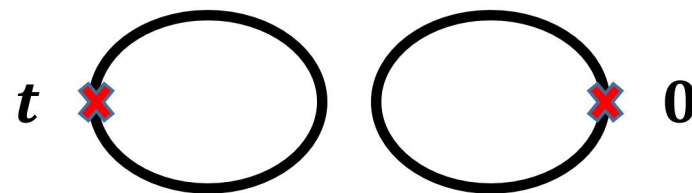
- HPQCD之前的计算 [PRD90, 1311.6669]
 - 除了在 q^2 -bin中比较截面, 还有更多观测量, $\phi \rightarrow K\bar{K}$
 - 忽略非连通图贡献(0ZI压低)
 - 模拟中 ϕ 不衰变; ϕ 宽度较窄, 预期阈效应小
 - 形状因子 V , A_2 , A_1 , A_0 ; z-expansion
 - 2+1味; 两个格距; HISQ价夸克作用量
 - 和BABAR ($D_s \rightarrow \phi e^+ \nu_e$), CLEO ($D \rightarrow K^*$) 的结果做比较 (假设 spectator quark的影响很小)



$$\langle \phi(p', \varepsilon) | V^\mu - A^\mu | D_s(p) \rangle$$

$$= \frac{2i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{M_{D_s} + M_\phi} \varepsilon_\nu^* p'_\alpha p_\beta V(q^2) - (M_{D_s} + M_\phi) \varepsilon^{*\mu} A_1(q^2) \\ + \frac{\varepsilon^* \cdot q}{M_{D_s} + M_\phi} (p + p')^\mu A_2(q^2) + 2M_\phi \frac{\varepsilon^* \cdot q}{q^2} q^\mu A_3(q^2) \\ - 2M_\phi \frac{\varepsilon^* \cdot q}{q^2} q^\mu A_0(q^2).$$

$$A_3(q^2) = \frac{M_{D_s} + M_\phi}{2M_\phi} A_1(q^2) - \frac{M_{D_s} - M_\phi}{2M_\phi} A_2(q^2)$$



两点函数中的非连通图

$$A_0(0) = A_3(0)$$

$$D_s \rightarrow \phi l \nu$$

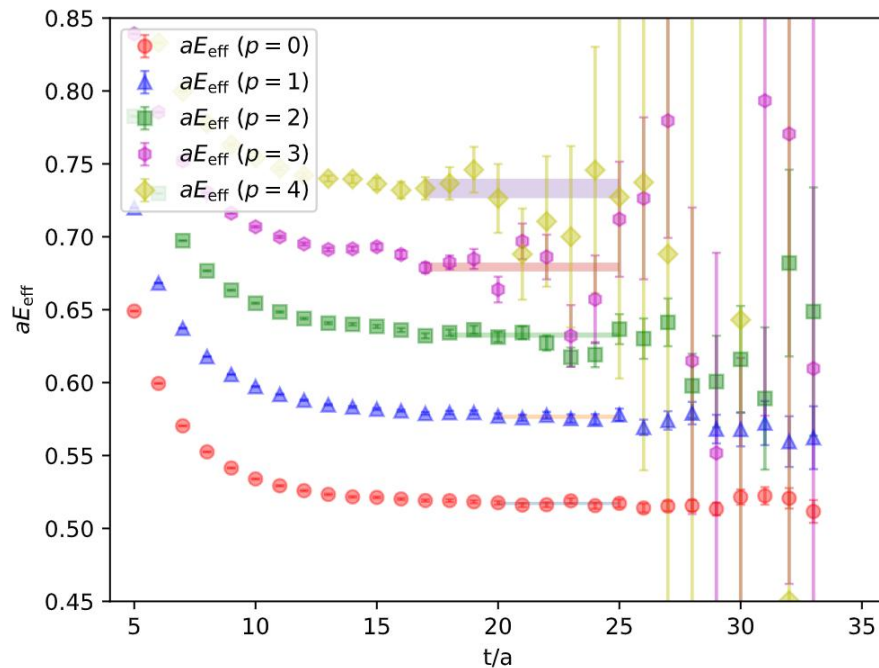
G. Fan, ZL, Y. Meng et al., in progress

2+1味组态, clover fermions [CLQCD]

Ensemble	C24P29	C32P23	F32P30	F48P21	H48P32
a (fm)	0.10524(05)(62)	0.10524(05)(62)	0.07753(03)(45)	0.07753(03)(45)	0.05199(08)(31)
$\tilde{m}_s^b$	-0.2400	-0.2400	0.2050	0.2050	0.1700
$\tilde{m}_l^b$	-0.2770	-0.2790	0.2295	0.2320	0.1850
$\tilde{m}_c^b$	0.4159(07)	0.4190(07)	0.1974(05)	0.1997(04)	0.0551(07)
$L^3 \times T$	$24^3 \times 72$	$32^3 \times 64$	$32^3 \times 96$	$48^3 \times 96$	$48^3 \times 144$
$N_{\text{cfg}} \times N_{\text{src}}$	450×72	200×64	180×96	150×96	150×144
m_π (MeV)	292.3(1.0)	227.9(1.2)	300.4(1.2)	207.5(1.1)	316.6(1.0)
t	2 – 17	2 – 20	4 – 22	4 – 26	8 – 30
Z_V^s	0.85184(06)	0.85350(04)	0.86900(03)	0.86880(02)	0.88780(01)
Z_V^c	1.57353(18)	1.57644(12)	1.30566(07)	1.30673(04)	1.12882(11)
Z_A/Z_V	1.07244(70)	1.07375(40)	1.05549(54)	1.05434(88)	1.03802(28)

- 三个格距, ~4个pion 质量
- D_s 静止, 改变 ϕ 的三动量 $\vec{p} = \frac{2\pi}{La}(k_x, k_y, k_z)$
- $(k_x, k_y, k_z) = (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 0, 0)$
- (轴) 矢量流重正化常数 [CLQCD, arXiv:2408.03548]

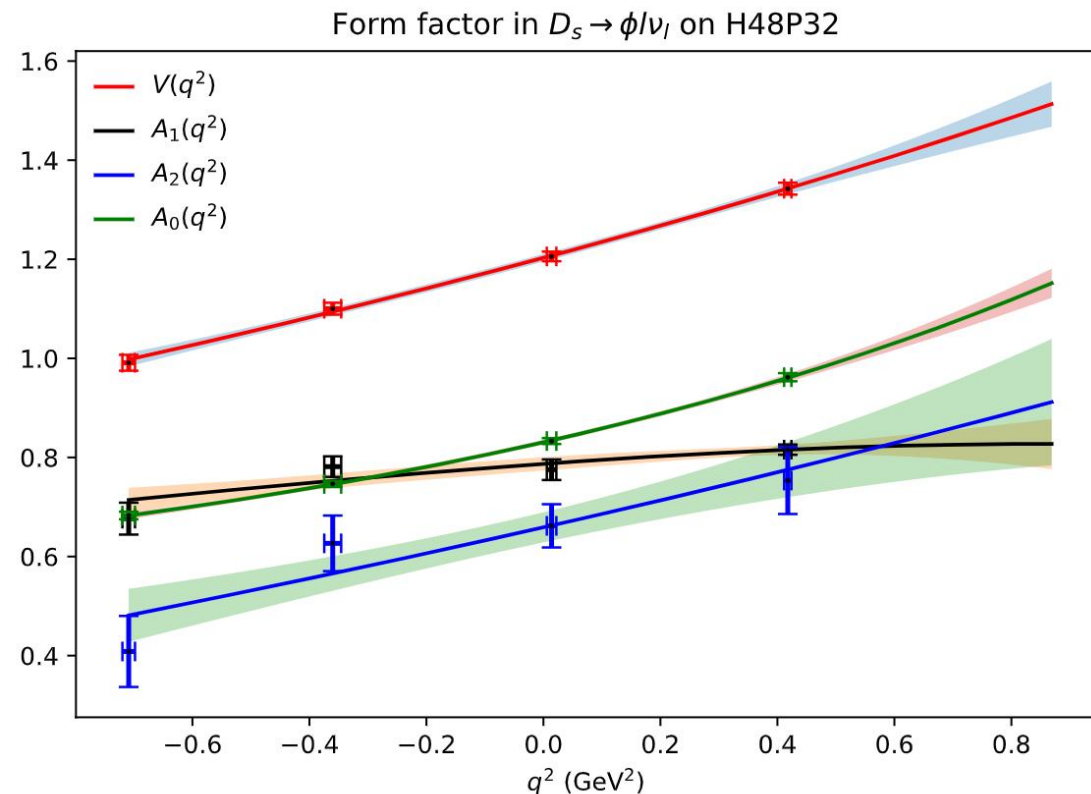
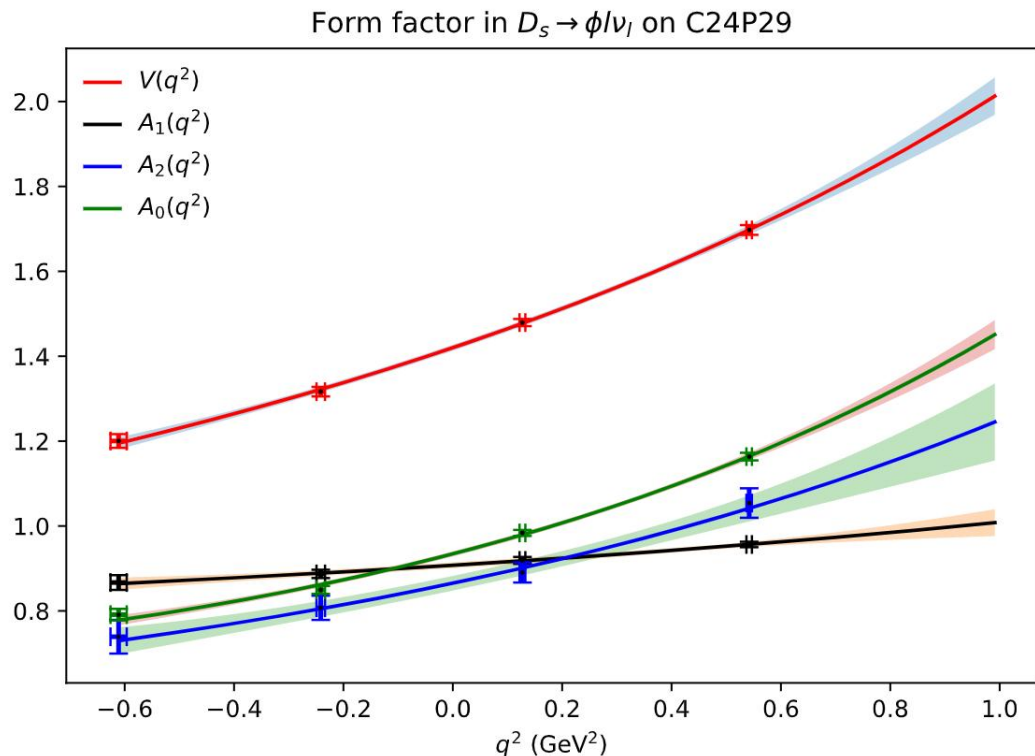
ϕ 两点函数质量平台



组态 C24P29

$D_s \rightarrow \phi l \nu$ 形状因子 q^2 依赖

Preliminary results



$$z(q^2, t_0) = \frac{\sqrt{t_+ - q^2} - \sqrt{t_+ - t_0}}{\sqrt{t_+ - q^2} + \sqrt{t_+ - t_0}}$$

where $t_+ = (m_{D_s} + m_\phi)^2$, $t_0 = 0$

$$V = \frac{1}{1 - q^2/m_{D_s^*}^2} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2)$$

$$A_{0,1,2} = \frac{1}{1 - q^2/m_{D_{s1}}^2} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2)$$

$$A_3(q^2) = \frac{M_{D_s} + M_\phi}{2M_\phi} A_1(q^2) - \frac{M_{D_s} - M_\phi}{2M_\phi} A_2(q^2)$$

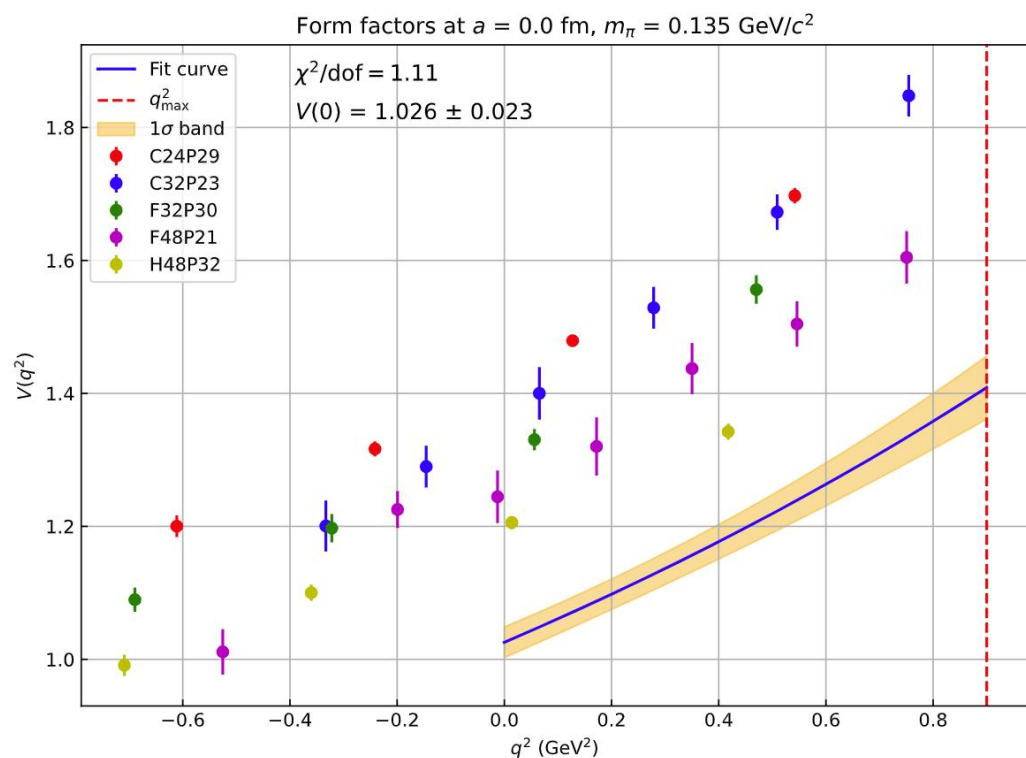
物理质量点及连续极限下的形状因子

$$D_s \rightarrow \phi l \nu$$

$$V(q^2, a, m_\pi) = \frac{1}{1 - q^2/m_{D_s^*}^2} \sum_{i=0}^2 (c_i + d_i a^2) \left[1 + f_i (m_\pi^2 - m_{\pi, \text{phys}}^2) + g_i (m_\pi^2 - m_{\pi, \text{phys}}^2)^2 \right] z^i$$

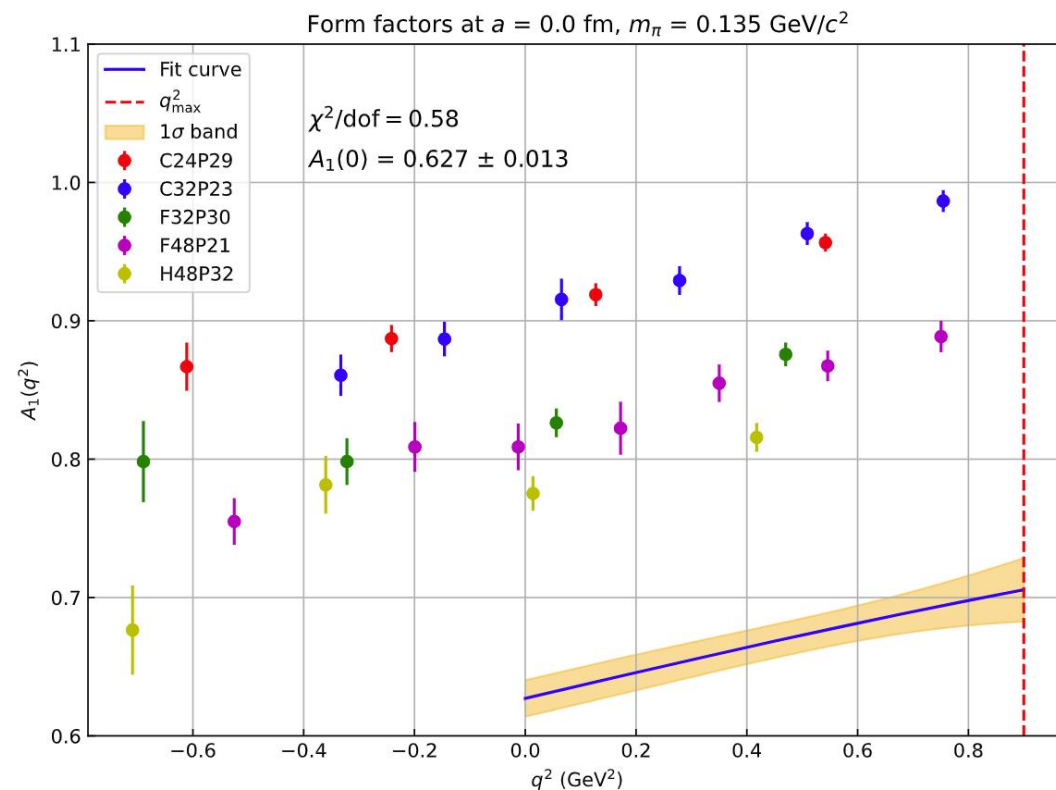
$$A_{0,1,2}(q^2, a, m_\pi) = \frac{1}{1 - q^2/m_{D_{s1}}^2} \sum_{i=0}^2 (c_i + d_i a^2) \left[1 + f_i (m_\pi^2 - m_{\pi, \text{phys}}^2) + g_i (m_\pi^2 - m_{\pi, \text{phys}}^2)^2 \right] z^i$$

单极点参数化形式给出
误差范围内一致结果



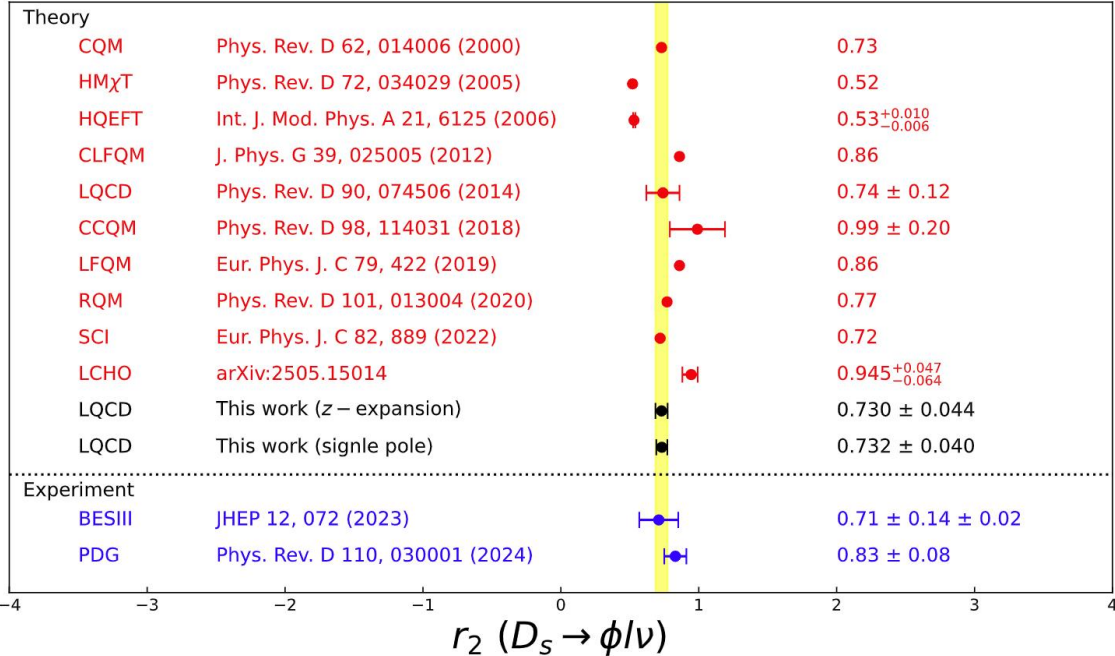
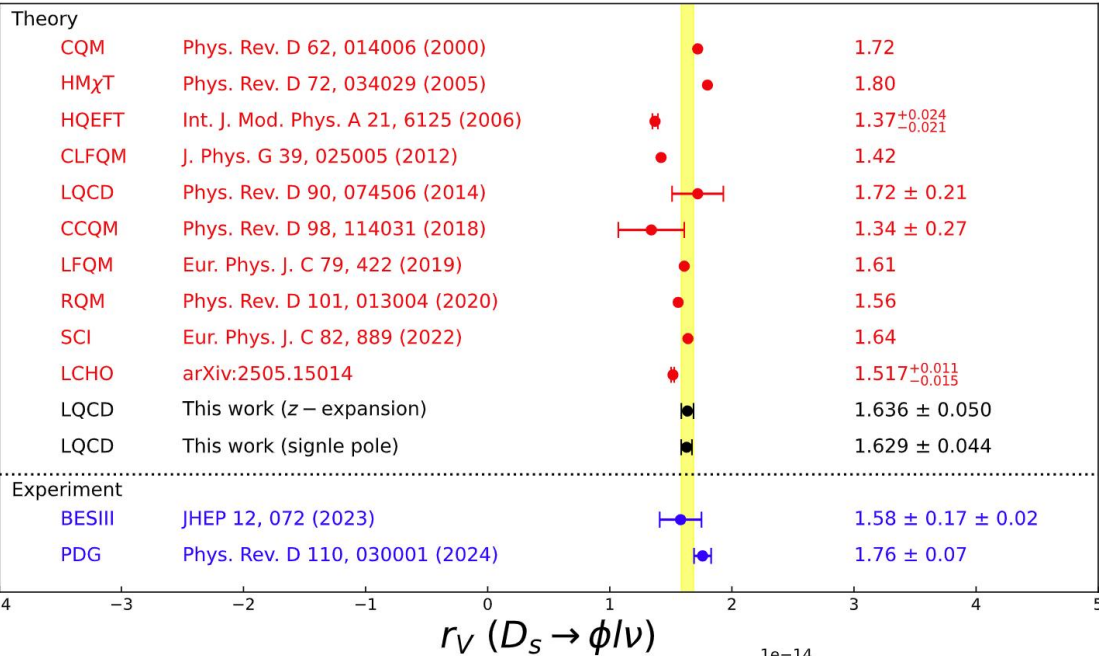
$A_0(0) - A_3(0) = -0.005(27)$
和零一致，符合运动学限制

$$m_{\pi, \text{phys}}^2 = 135.0 \text{ MeV}/c^2, m_{D_s^*}^2 = 2112.2 \text{ MeV}/c^2, m_{D_{s1}}^2 = 2459.5 \text{ MeV}/c^2$$



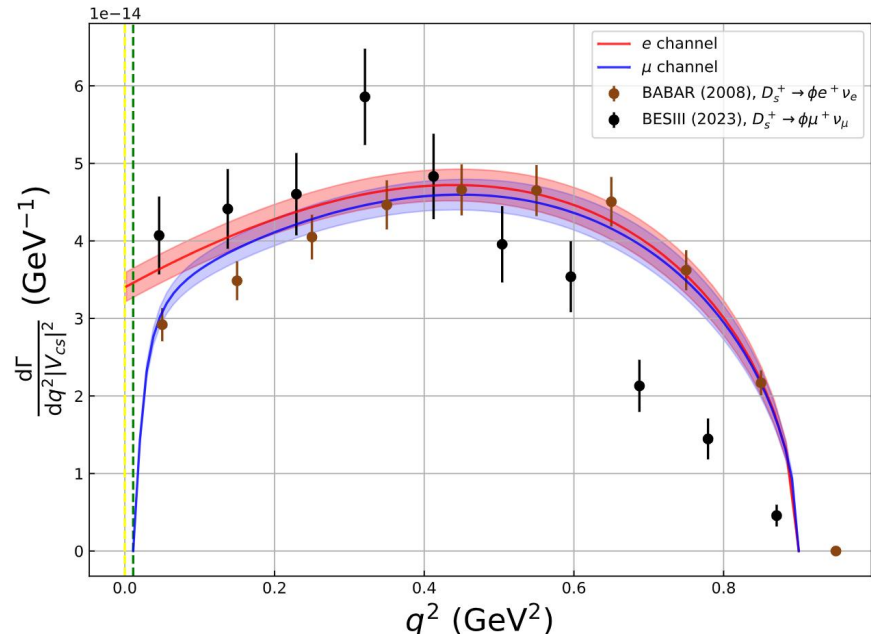
$D_s \rightarrow \phi l \nu$

Preliminary results



$r_V = V(0)/A_1(0)$

$r_2 = A_2(0)/A_1(0)$



数据点:
BABAR, PRD78.051101(R) (2008)
BESIII, JHEP12 (2023) 072

小结

- 粲介子半轻衰变研究有助于标准模型精确检验和新物理寻找
- 利用格点QCD计算强子矩阵元（形状因子）
 - $D \rightarrow Kl\nu$
 - $D_s \rightarrow \phi l\nu$

谢谢！

(广告：2025年格点QCD研讨会)

复合算符重整化
粲介子衰变常数
形状因子

ZL et al. (χ QCD), 1312.7628, PRD90.034505
Y. Bi, ..., ZL et al., 1710.08678, PRD97.094501
F. He, ..., ZL et al., 2204.09246, PRD106.114506
Y. Bi, ..., ZL et al., 2302.01659, PRD108.054506
 χ QCD, arXiv:1410.3343, PRD92.034517 (2015)
 χ QCD, arXiv:2008.05208, CPC45.023109 (2021)
D. Li, ..., ZL et al., 2407.03697, CPC48.123104 (2024)
Y. Meng, ..., ZL et al., 2401.13475, PRD109.074511
T. Shen, ..., ZL et al., 2503.01219, PoS LAT2024 (2025) 294
G. Fan, ZL, Y. Meng et al., in progress

第五届中国格点量子色动力学研讨会

将于**2025年10月9日-10月12日**在广东惠州举办（**10月9日报到**），由中国科学院近代物理研究所承办。





第五届中国格点量子色动力学研讨会
2025年10月9日-12日 广东惠州（10月9日报到）
中国科学院近代物理研究所 承办



强相互作用的非微扰性质是标准模型中尚待解决的重大理论疑难。从第一性原理出发，格点QCD能够利用超大规模数值模拟，数值计算上述非微扰性质，并与实验结果相互印证。中国于20世纪八十年代初开始格点QCD研究，并于2005年成立了中国格点QCD合作组（CLQCD）。经过多年发展和近期一大批优秀年轻研究人员的加盟，同时借助超级计算机技术的迅猛进步，中国的格点QCD合作组近年来产生了一套系统的动力学组态，并具备了在强子能谱、核子结构、QCD相结构和标准模型精细检验等方向探索国际前沿问题的能力。

自2021年起，本系列会议在国内外同行的支持下先后在华南师范大学、上海交通大学/李政道研究所、北京大学、湖南师范大学举办。“第五届中国格点量子色动力学研讨会”将于2025年10月9日-10月12日在广东惠州举办（10月9日报到），由中国科学院近代物理研究所承办。

研讨会诚邀相关领域专家共同探讨粒子物理、核物理中的重要前沿问题，以及格点QCD在国产超算上的软件开发，寻求格点QCD与相关领域的合作和协同发展。会议得到了国家自然科学基金委重大项目《基于国产超算的格点量子色动力学关键科学问题研究》和南方核科学理论中心的资助。为确保各位专家的住宿及会议准备工作顺利进行，请您于8月31日前及时注册会议信息。

注册链接：<https://indico.itp.ac.cn/event/324/>
会议组委会：中国格点QCD合作组
会议联系人：
刘柳明：liuming@impcas.ac.cn
孙鹏：pengsun@impcas.ac.cn
薛琴（会务秘书）：xueqin@impcas.ac.cn



强子矩阵元的格点计算

$$C(t) = \langle \Omega | O(t) O^\dagger(0) | \Omega \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} |\langle \Omega | O | P \rangle|^2 e^{-m_P t} \equiv A e^{-m_P t}$$

- 介子衰变常数从两点函数抽取, 例如 $O = \bar{q} \gamma_0 \gamma_5 c$

$$\langle 0 | \bar{q}(0) \gamma_\mu \gamma_5 c(0) | P(p) \rangle = i f_P p_\mu \quad q = d, s$$

- 结合两点 and 三点函数可抽取半轻过程强子矩阵元 (形状因子):

$$C_3(\vec{p}, \vec{p}', T, t) = \sum_{\vec{z}} \sum_{\vec{y}} \langle 0 | O_P(\vec{z}, T) J(\vec{y}, t) O_D^\dagger(\vec{x}, 0) | 0 \rangle e^{-i\vec{p} \cdot \vec{z}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{y}}$$

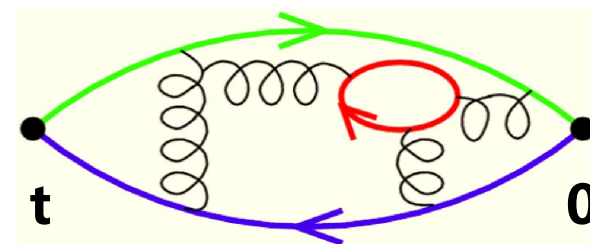
$$\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{T \rightarrow \infty} \xrightarrow{(T-t) \rightarrow \infty} \langle 0 | O_P | P \rangle \langle P | J | D \rangle \langle D | O_D^\dagger | 0 \rangle e^{-m_D t} e^{-m_P (T-t)}$$

- 算符的重正化常数

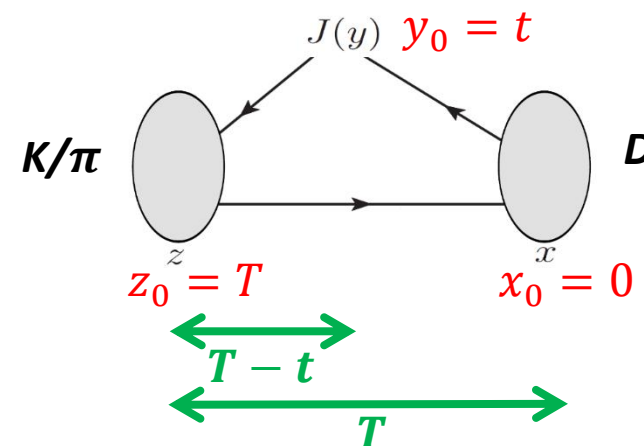
- 由于离散效应, 格子上的局域(轴)矢量流 $\bar{q} \gamma_\mu c$ ($\bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 c$) 需要归一化常数 $Z_{V,A}$
- 标量及张量流算符随能标跑动, $Z_{S,T}$

- 使用手征格点费米子有时可避免重正化常数的计算 ($Z_S Z_m = 1$)

- PCAC: $(m_q + m_c) \langle 0 | \bar{q}(0) \gamma_5 c(0) | P(p) \rangle = f_P m_{PS}^2$



两点关联函数



三点关联函数

- PCVC: $\langle K | S | D \rangle = f_0^{D \rightarrow K}(q^2) \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_c - m_s}$

$|V_{cd}|$ 和 $|V_{cs}|$

$$f_D|V_{cd}| = 45.82(1.10) \text{ MeV}, \quad f_{D_s}|V_{cs}| = 243.5(2.7) \text{ MeV}$$

PDG2024, PRD110(2024).030001

$$f_+^{D\pi}(0)\eta_{EW}|V_{cd}| = 0.1426(18), \quad f_+^{DK}(0)\eta_{EW}|V_{cs}| = 0.7180(33)$$

HFLAV, EPJC81(2021) 226, 1909.12524

$$\eta_{EW}^2 = 1.018$$

- 纯轻过程，LQCD误差比实验误差小
(2+1, 2+1+1味)
- 介子半轻过程，LQCD误差比实验误差大
- Λ_c 半轻过程，格点误差比实验大

CKM幺正性 (第二行) 在 10^{-2} 精度上成立

$$N_f = 2 + 1: |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 - 1 = 0.00(3)$$

$$N_f = 2 + 1 + 1: |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 - 1 = -0.01(2)$$

FLAG Review 2024, arXiv:2411.04268

Results up to 2024.4.30

