第一章作业

1. G是实数对(a,b) $a\neq 0$ 的集合. G上定义乘法 $(a,b)\cdot(c,d)=(ac,ad+b)$.
证明G是群.

证明: 封闭性 ~~设有$g_1=(a_1,b_1)$~~ $g_1=(a,b)\in G$. $g_2=(c,d)\in G$. $a\neq 0$, $c\neq 0$

对$\forall g_1,g_2\in G$. $g_1\cdot g_2=(ac,ad+b)$ $ac\neq 0$.

即 $g_1\cdot g_2\in G$. 即证封闭性.

结合律 设有 $g_1=(a_1,b_1)$ $g_2=(a_2,b_2)$ $g_3=(a_3,b_3)$

$g_1,g_2,g_3\in G$. $a_1\neq 0$ $a_2\neq 0$ $a_3\neq 0$

$$(g_1\cdot g_2)\cdot g_3=(a_1a_2,\ a_1b_2+b_1)\cdot(a_3,b_3)$$
$$=(a_1a_2a_3,\ a_1a_2b_3+a_1b_2+b_1)$$

$$g_1\cdot(g_2\cdot g_3)=(a_1,b_1)\cdot(a_2a_3,\ a_2b_3+b_2)$$
$$=(a_1a_2a_3,\ a_1a_2b_3+a_1b_2+b_1)$$

$(g_1\cdot g_2)\cdot g_3=g_1\cdot(g_2\cdot g_3)$

$\therefore$ 对$\forall g_1,g_2,g_3\in G$. 都有 $(g_1\cdot g_2)\cdot g_3=g_1\cdot(g_2\cdot g_3)$

存在唯一的单位元素

$e=(1,0)$ $\forall g\in G$ $g=(a,b)$

$e\cdot g=(1,0)\cdot(a,b)=(a,b)$ $g\cdot e=(a,b)\cdot(1,0)=(a,b)$

$e\cdot g=g\cdot e=g$

存在逆元

对$\forall g=(a,b)\in G$. 都有 $g^{-1}=(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})$

使得 $g\cdot g^{-1}=(a,b)\cdot(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})=(1,0)=e$

$g^{-1}\cdot g=(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})\cdot(a,b)=(1,0)=e$

综上所述 ~~G是群~~ $(G,\cdot)$是群