

# 对撞物理

The Course will be shared between  
Haiping Peng and me, Toni Baroncelli

And is organized in several parts, lasting in total 16 weeks + 2 weeks for examinations:

(Tentative schedule)

Topic	Weeks	Who	from	→	# lectures
Introduction to basic concepts	2	T.Baroncelli	27/02/24	08/03/24	4
Deep Inelastic Scattering	1	T.Baroncelli	05/03/24	15/03/24	6
Accelerators	1	T.Baroncelli	12/03/24	22/03/24	8
Detectors	1	T.Baroncelli	19/03/24	29/03/24	10
Measurements at Colliders	3	T.Baroncelli	09/04/24	19/04/24	16
Standard Model Theory	2	H.Peng	24/04/24	03/05/24	4
CPV theory and experiment (BELLE,BABAR, LHCb)	2	H.Peng	08/05/24	17/05/24	8
Hadron physics (BESIII, STCF)	2	H.Peng	22/05/24	31/05/24	12
Higher Symmetries (GUT, SUSY, Superstrings....)	2	H.Peng	05/06/24	14/06/24	16

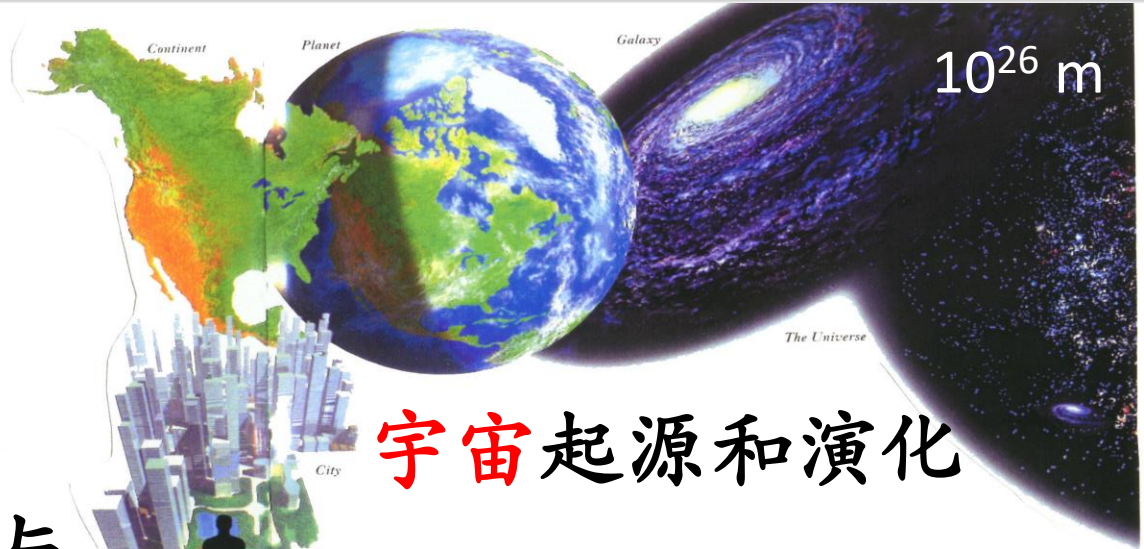
# 对撞物理

---

## 标准模型

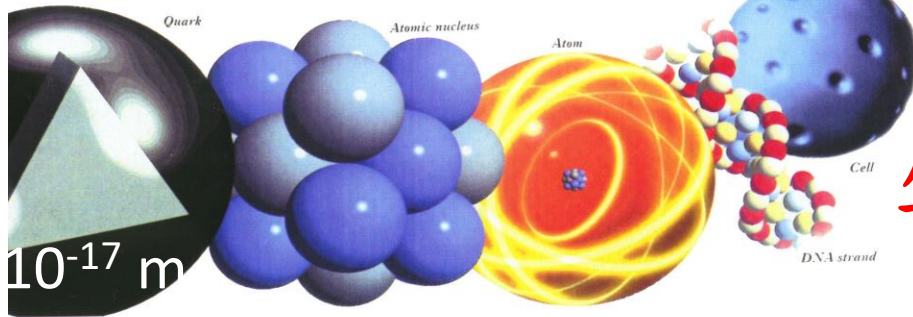
彭海平  
中国科学技术大学

# 自然界最基本的科学问题



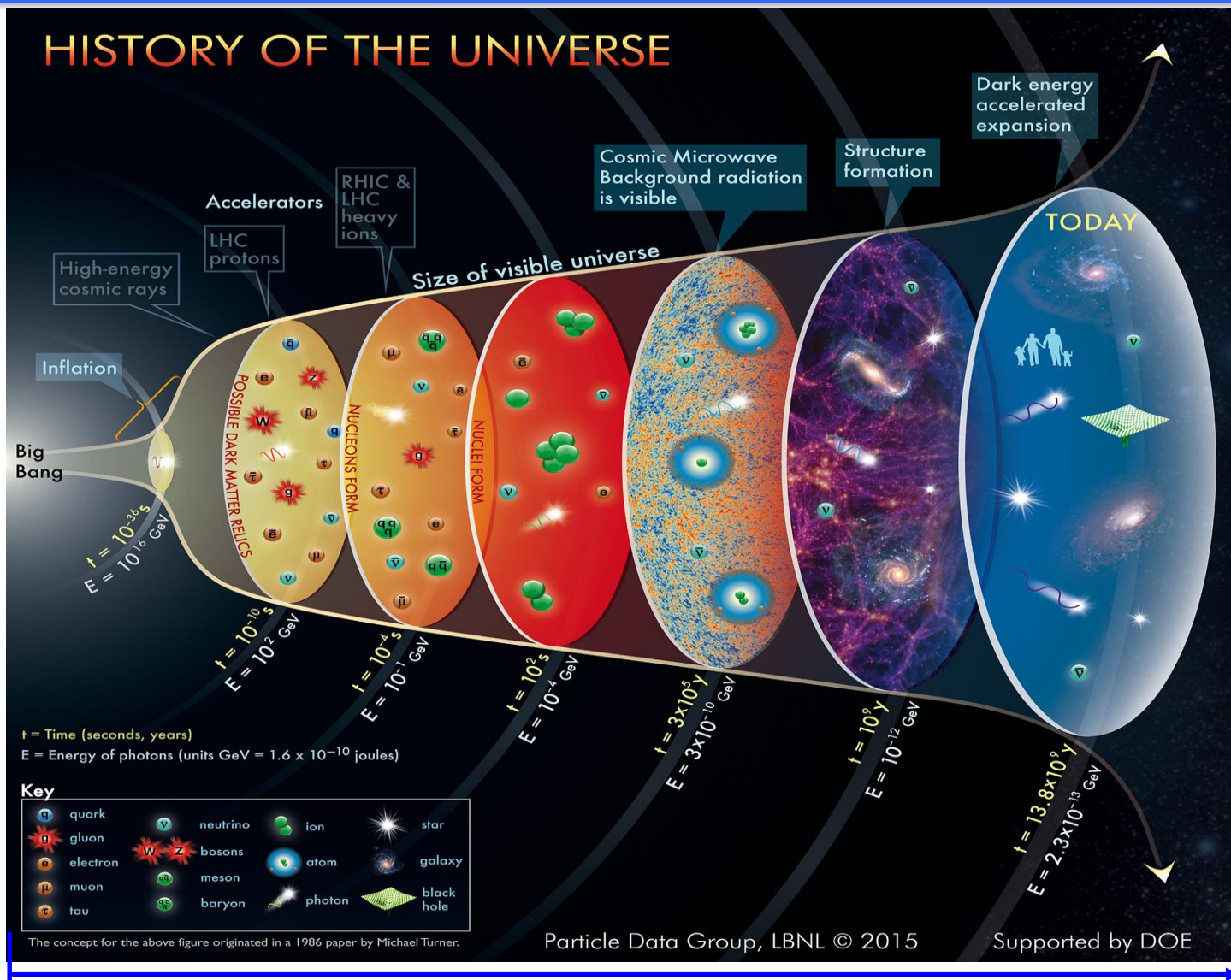
宇宙起源和演化

物质的最基本结构与其相互作用



生命起源和本质

# 粒子物理和宇宙起源与演化

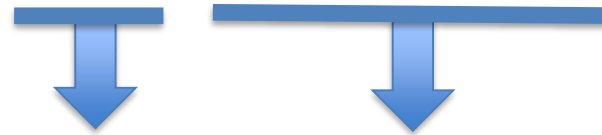


138 亿年,  $10^{26}$  米

# 物理学理论模型

- 完美：对称性、简单
- 普适性
- 预言能力

标准模型：Yang-Mills 场  $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$  规范理论

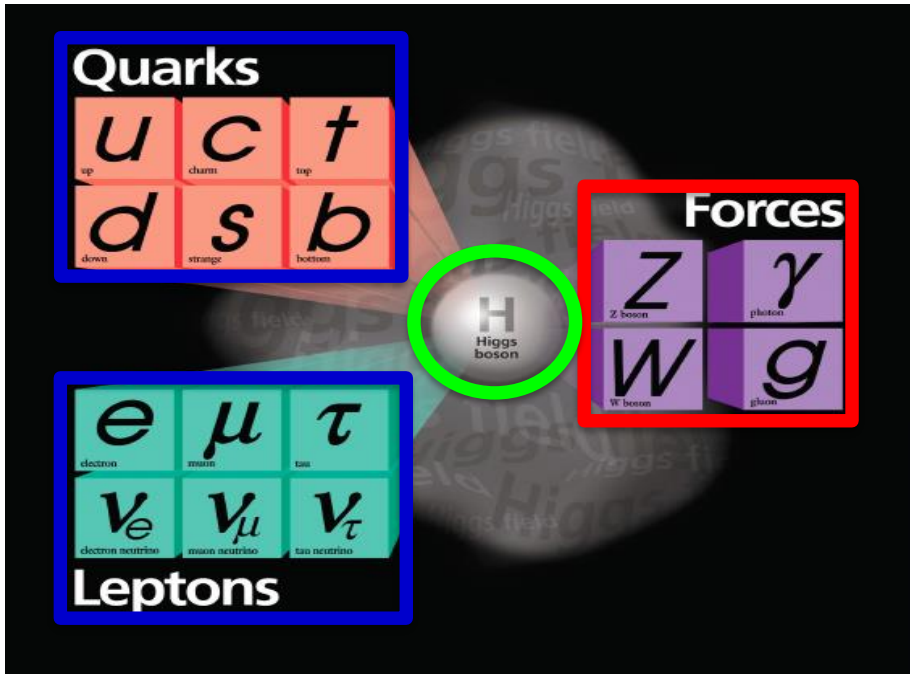


量子色动力学

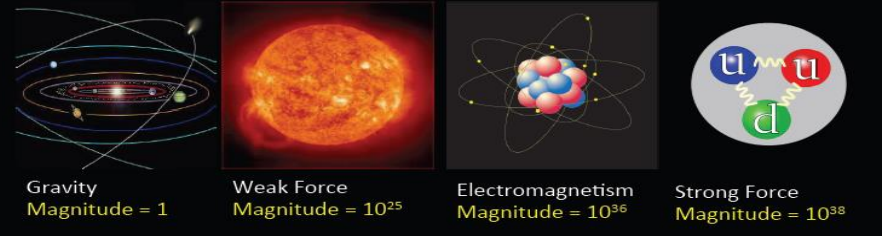
电弱统一理论

# 微观物质世界：标准模型

## 粒子物理领域的最高成就



- 物质的基本组分是**夸克**和**轻子**。
- 稳定的物质世界由第一代夸克和轻子组成。
- 第二，三代夸克和轻子只能在实验室和宇宙中产生，且其寿命极短。



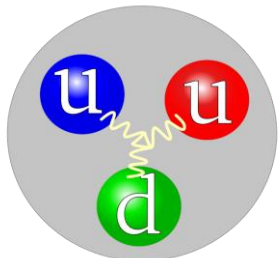
- 粒子间的相互作用力（引力除外）由**量子理论**描述。作用力由力的携带粒子来传递。
- 粒子的质量是通过**Higgs**场获得的。
- 电弱统一模型（ElectroWeak, EW）
- 量子色动力学（Quantum Chromodynamics, QCD）

规范场论  
gauge field theory

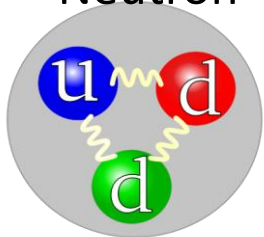
# 微观物质世界：标准模型

## 粒子物理领域的最高成就

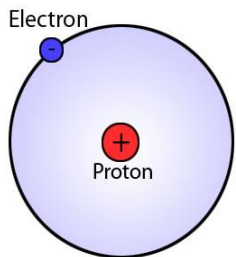
Proton



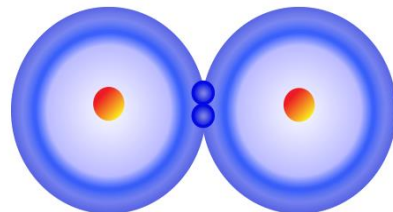
Neutron



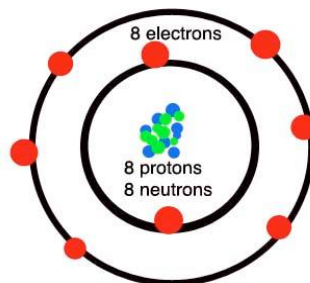
Hydrogen atom



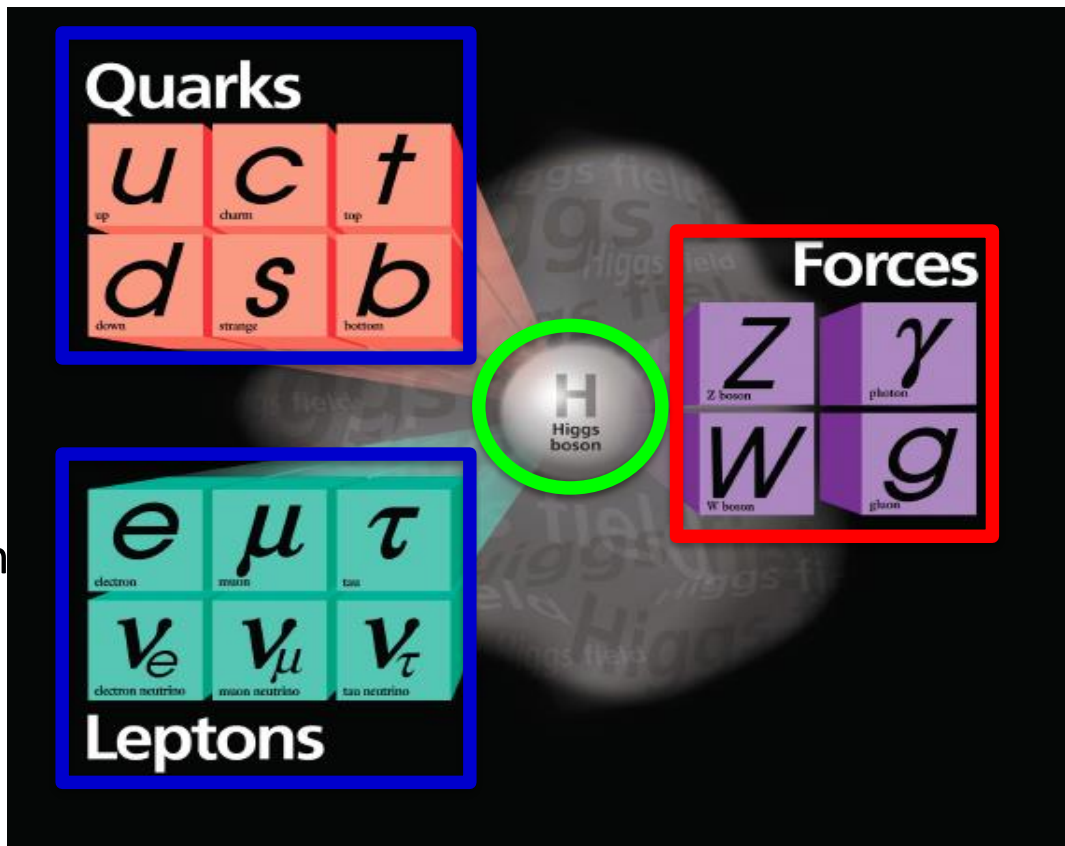
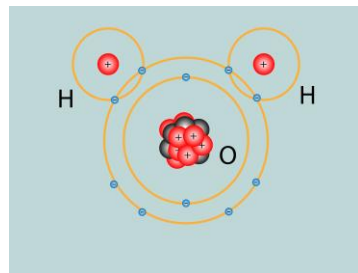
Molecular Hydrogen



Oxygen



Water



- 标准模型得到了大量的实验验证
- Higgs粒子的发现为粒子物理的研究打开新的领域<sup>7</sup>

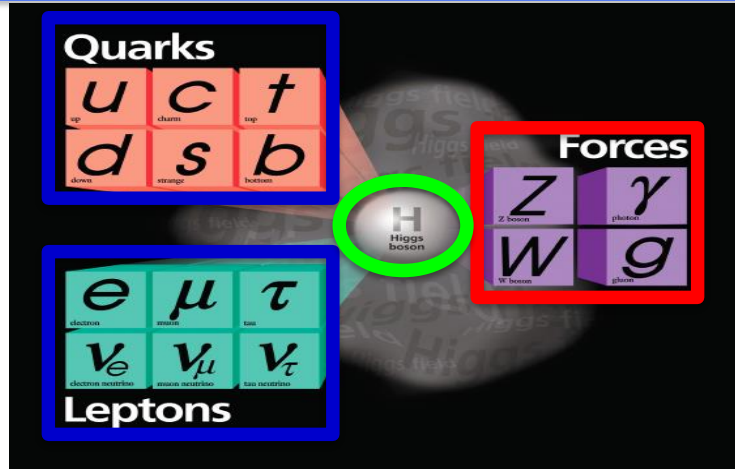
# 标准模型：不是终极模型！

## 不完备性：

- 引力
- 质量等级
- 暗能量与暗物质
- 中微子质量
- 正反物质不对称性

## 不能解释的实验：

- $\mu$ -氢原子半径
- $\mu$ -反常磁矩  $g-2$
- 介子衰变，如  
 $\bar{B} \rightarrow D^{(*)} \tau^{-} \bar{\nu}_{\tau}$



## 理论自身问题：

- 自由参数数量

## 未验证的预研：

- 胶子球
- 混杂态

## 存在更普适的理论模型：大统一理论

## 粒子物理领域国际共识的前沿科学问题：

- 物质质量起源：Higgs物理
- 强子结构：夸克与胶子如何构成强子？
- 暗物质：是一种新的基本粒子？怎么观测？
- 中微子与无中微子双 $\beta$ 衰变
- ○ ○ ○ ○



# 电弱统一理论

♣ 最早成功地把两种不同的相互作用统一起来的是牛顿，他把重力和星球间引力统一到万有引力。在1865年，麦克斯韦把电和磁统一到了一种矢量场理论—电磁场中。统一的电磁场用麦克斯韦方程来描写。麦克斯韦方程引入了一个自由参数—光速。

♣ 量子电动力学告诉我们，电磁场是 $U(1)_{em}$ 规范相互作用。统一的电弱相互作用也应该是规范相互作用。如要建立电磁相互作用和弱相互作用的统一理论，需要解决以下几个问题：

- (1) 规范相互作用总是和一定规范变换群下的不变性相联系，电磁规范相互作用是和 $U(1)$ 规范不变性相联系。如果有统一的电弱规范相互作用，首先要回答它是和什么规范变换群的不变性相联系？
- (2) 电磁规范相互作用是通过放出和吸收光子来体现的，规范不变性决定光子的自旋为1，光子的质量为0。统一的电弱相互作用如果是规范相互作用，则规范粒子的自旋应为1，质量应为0。但弱相互作用是近程相互作用，传递弱相互作用的规范玻色子的质量应该很重，这表明规范对称性已经破缺，就需要回答规范对称性如何破缺，如何使中间玻色子获得重质量？机制是什么？
- (3) 电磁规范相互作用是可重整的，这是QED理论已经证明了的。但对于电弱相互作用，是不是可重整的，特别是在规范对称性破缺，中间玻色子得到质量之后，电弱相互作用是不是仍然是可重整的，这还需要从理论上给予证明。有质量规范场能否重整化？

# 电弱统一理论

---

- (4) 场论中给出：在连续变换对称性自发破缺时，必然伴随出现零自旋、零质量的粒子，称为戈德斯通玻色子。然而实验上并没有发现这样的粒子。因此，如何能在电弱规范对称性破缺的同时，不出现这种零自旋、零质量的粒子，也是理论上必须解决的问题。

# 电弱统一理论

---

1. 电弱相互作用理论发展简史
2. GIM机制和CKM矩阵
3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱
4. 对称性破缺和Goldstone定理
5. 定域规范对称性和Brout-Englert-Higgs机制
6.  $\sigma(e^+e^- \rightarrow f^+f^-)$ 的计算

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

从1930到1970年代，电弱统一之路经历了大约50年的艰难历程。

1. **1934年**：为了解释原子核的Beta衰变的电子“反常”能谱，W.泡利提出存在中微子 $\nu$ 的假设，用三体衰变（但中微子不可见）解释了 $\beta$ 衰变的电子连续谱。

1934年，费米借鉴电动力学理论提出描述 $\beta$ 衰变的流-流有效理论：

$n \rightarrow pe\bar{\nu}_e$   
四个费米子相互作用

$$\mathcal{L}_{weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu)$$

强子流

轻子流

但是耦合常数 $G_F$ 与电动力学很不一样，不但非常弱，而且带质量量纲的负二次方。这里的弱作用是四个费米子的点相互作用。

2. **1936年**：G. Gamow和E. Teller推广了费米理论：

$$\mathcal{L}_{weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i C_i (\bar{\psi}_p \Gamma^i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma^i \psi_\nu),$$

其中 $\Gamma_i = (1, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5, \sigma_{\mu\nu})$ 构成了16个 $4 \times 4$ 狄拉克矩阵(完全集合)。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

3. **1949年**: J.A. Wheeler 和 J. Tiomno, 李政道, Rosenbluth 和杨振宁等人提出费米弱作用的普适性建议。即对不同的弱作用过程

$$\beta - \text{decay} : \quad n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e,$$

$$\mu - \text{decay} : \quad \mu^{-} \rightarrow e^{-} + \bar{\nu}_e + \nu_{\mu},$$

$$\mu - \text{capture} : \quad \mu^{-} + p \rightarrow n + \nu_{\mu}.$$

可用同一耦合常数  $G_F = 1.03/m_p^2 \times 10^{-5}$  来描写, 此即费米耦合常数。

4. **1954年**: 杨振宁和米尔斯[94] 在量子场论中首次引入定域  $SU(2)$  规范不变的概念, 为电弱统一理论理论的建立提供了数学框架。
5. **1955年**: Alvarez 等人发现  $\theta$ ,  $\tau$  粒子有相同的衰变宽度 ( $\Gamma_{\theta} = \Gamma_{\tau}$ ) 和质量 ( $m_{\theta} = m_{\tau}$ ), 似乎应该是同一个态。但是通过对不同的衰变道的观测, 发现其末态宇称相反:

$$\theta^{+} \rightarrow \pi^{+}\pi^{0}, \quad J^P = 0^{+};$$

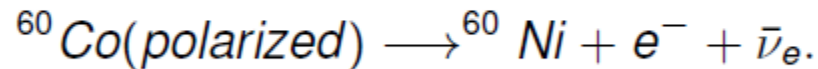
$$\tau^{+} \rightarrow \pi^{+}\pi^{+}\pi^{-}, \quad J^P = 0^{-}.$$

这就是历史上俗称的  $\theta - \tau$  之谜。

6. **1956年**: 李政道和杨振宁认为  $\theta$  和  $\tau$  是同一个粒子, 但在弱相互作用过程宇称可以不守恒, 并提出实验建议, 以检验弱相互作用中的宇称不守恒[48]。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

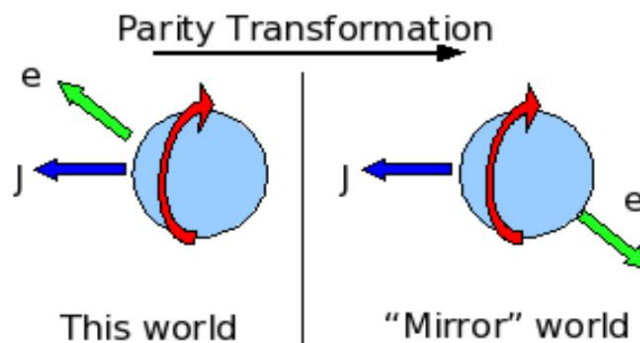
7. **1957年**: 为了检验弱相互作用中宇称是否守恒, 吴健雄等人测量了 $^{60}\text{Co}$   $\beta$ 衰变中电子的角分布



发现其衰变依赖于赝标量 $\langle \vec{J}_{nuc} \rangle \cdot \vec{p}_e$ , 证明弱相互作用中宇称不守恒。

实验的原理是利用核磁技术使钴60的原子核极化, 即原子核的自旋方向沿确定方向排列, 观察钴60通过 $\beta$ 衰变(弱作用)放出电子的方向分布。

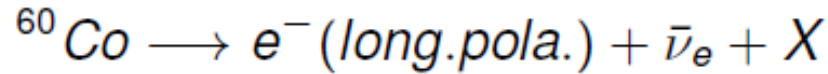
- (1) 如果宇称是守恒的, 则沿自旋轴正向的半球方向内射出的电子数应与包含自旋轴负向的半球方向内射出的电子数相近(自旋与角动量在镜像变换下不变), 即左右对称;
- (2) 反之如果这两个半球方向内射出的电子数不相等, 即表现出明显的左右不对称性; 则表明弱相互作用过程中宇称可以不守恒。



宇称变换:  
自旋不变  
动量相反  
螺旋度相反

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

1957年, H. Fraunfelder等人进一步确认在弱作用中宇称不守恒:  
对在 $\beta$ 衰变过程



中发射的电子的纵向极化量 ( $\vec{\sigma}_e \cdot \vec{p}_e$ ) 的测量表明, 弱作用中发射的电子绝大部分是左手的。弱作用中宇称不守恒的发现表明: 在弱作用流中必须包含有 $\gamma_5$ 项

$$\mathcal{L}_{\text{weak}} \longrightarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i C_i \left( \bar{\psi}_p \Gamma^i \psi_n \right) \left( \bar{\psi}_e \Gamma^i (1 \pm \gamma_5) \psi_\nu \right) \quad \text{弱流V-A}$$

这时, CP对称性保持(P破坏时, C也破坏)。

矢量流

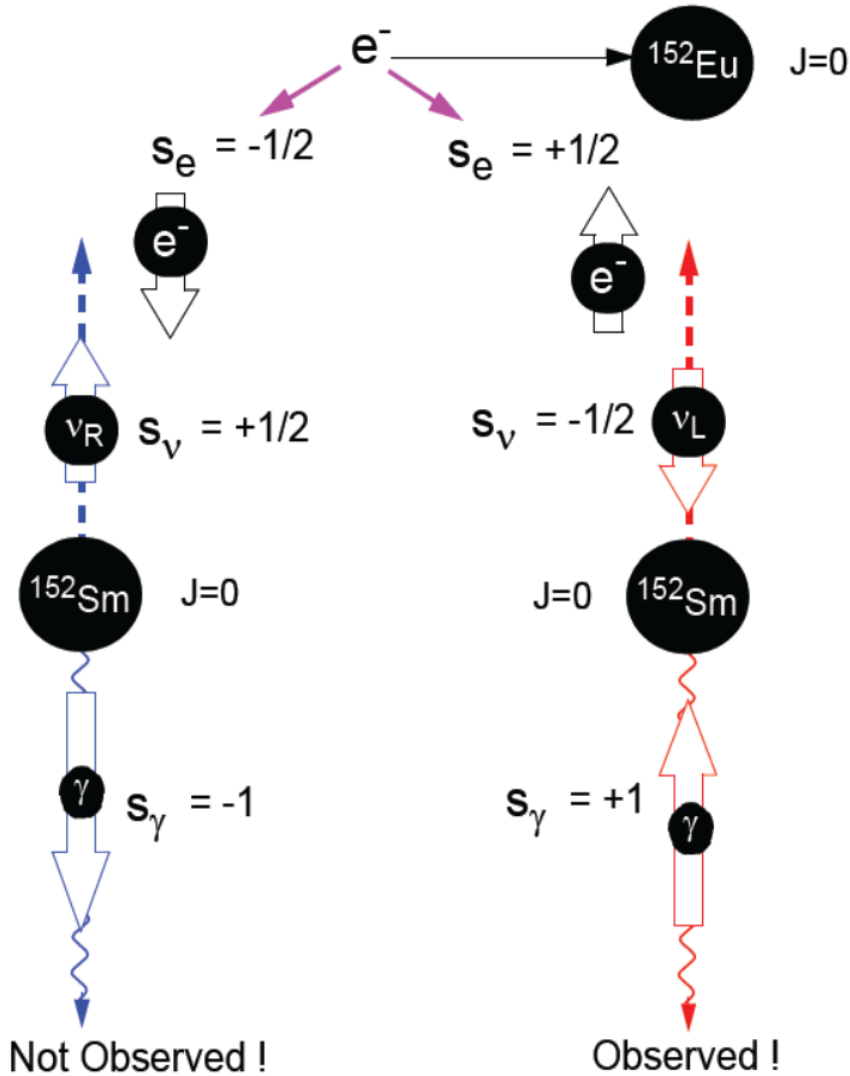
轴矢量流

1957年, 李政道, 杨振宁和朗道等人提出中微子的二分量理论。它要求中微子要么是左手的要么是右手的。由于已知弱作用中涉及的电子(正电子)是左手(右手)的, 故轻子流应写为

$$J_{\text{lept.}}^i \equiv \bar{\psi}_e \Gamma^i (1 \pm \gamma_5) \psi_\nu \longrightarrow \bar{\psi}_e (1 + \gamma_5) \Gamma^i \psi_\nu.$$

因此中微子螺旋度的测量是决定弱流结构的关键。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

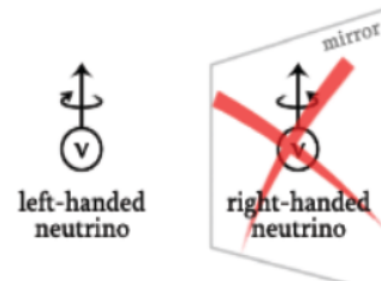


- 1958年，Goldhaber et al. 研究了铕元素对电子的俘获



- 光子和中微子的自旋之和等于电子的自旋
- 从光子的螺旋度可以确定中微子的螺旋度

只观测到了左旋中微子





# 1. 电弱相互作用理论发展简史

♣ 1957年, J.S. Schwinger, 李政道和杨振宁等人[95]发展了有关在弱作用中引入重质量的中间矢量玻色子( $W^\pm$ )的思想。认为四费米子相互作用是“类点”的, 即S-波相互作用。分波的么正性要求这种相互作用所产生的反应截面必须满足

$$\sigma < 4\pi/p_{cm}^2$$

然而, 由于 $G_F$ 具有量纲 $M^{-2}$ , 故四费米子弱相互作用的截面应满足

$$\sigma \sim G_F^2 p_{cm}^2$$

也就是说, 随着反应质心能量的提高, 反应截面将迅速增大。因此, 费米有效理论当 $p_{cm} \sim 300\text{GeV}$ 时将破坏理论的么正性。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

两个粒子的碰撞过程，根据场论的知识，散射算符的么正性要求散射矩阵元的绝对值不能大于 1，也即碰撞的总概率不能大于 1，因此作用截面随能量的增长要有个上限，这个上限就被称为么正限。马塞尔·弗里萨特 (Marcel Froissart) 导出了当质心系总能量  $\sqrt{s} \rightarrow \infty$  时，总截面么正限的一般公式：

$$\sigma_{\text{tot}} < \sigma_0 \left[ \ln \left( \frac{s}{s_0} \right) \right]^2$$

其中， $\sigma_0$  和  $s_0$  是两个常数，这表明截面随质心系总能量  $\sqrt{s}$  的增加而增加的趋势最大不能超过质心系总能量对数的平方。例如在  $\nu_e e^-$  散射中，普适 V-A 弱作用理论的一级近似给出总截面为

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi} s$$

随着  $s$  的增加而增加，就和么正限相矛盾。在散射的低阶近似中只有 S 波和 P 波，量子力学给出第  $l$  分波对总截面的贡献为

$$\sigma_l = \frac{4\pi(2l+1)}{s}$$

$l = 1,$

从某一个能量标度  $\sqrt{s_0}$  开始出现了矛盾。对

$$s_0 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{G_F} = 0.94 \times 10^6 \text{GeV}^2$$

普适费米弱作用理论不是一个基本弱作用理论，是低能范围的近似，普适的模型：高能区不破坏么正性，低能区近似回到费米弱作用理论，保持与电磁相互作用的密切相似性

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

♣ 这个问题可仿照QED那样，通过引入中间矢量玻色子来传递相互作用而得到解决。但这里的中间矢量玻色子应具有与光子不同的性质。首先由于 $\beta$ 衰变是荷电流过程，故该粒子应带电。其次由于弱作用的短程性，该粒子应当具有重质量。最后，它们不应具有确定的宇称以允许弱流具有V-A结构。引入满足上述特征的玻色子以后，轻子的费米拉氏量就由

$$\mathcal{L}_{weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[ \bar{\psi}_{\nu_l} \Gamma_\mu \psi_l \bar{\psi}_{\nu_l'} \Gamma_\mu \psi_l' + h.c. \right]$$

变为

$$\mathcal{L}_{weak} = G_W [J^{-\mu} W_\mu^+ + J^{+\mu} W_\mu^-]$$

式中的 $G_W$ 是新的耦合常数， $J^\mu = \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l$ 是弱作用带电流。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

8. **1958年**: R.Feynman 等人提出了普适性V-A相互作用理论:

$$J_{lept.}^{+\mu} = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}$$

**1958年**, M. Goldhaber [96] 等首次证实中微子是左手的 (即螺旋度为负的), 这个结果证实弱作用的结构确实是V-A型的。这也奠定了最大宇称破坏的弱作用理论。

弱相互作用拉氏量中的弱流应该表示成  $V - A$  的形式, 即应包含矢量流  $V = \bar{\Psi}_1 \gamma_\mu \Psi_2$  和轴矢量流  $A = \bar{\Psi}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_2$  两部分的等量混合, 并且对于各种粒子的弱作用过程是普适的。如果将旋量波函数分解成左手旋量和右手旋量的和,

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R = \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi + \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi,$$

同时忽略掉质量项, 那么不难证明这种形式的相互作用拉氏量中只有左手旋量的贡献。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

9. 1961年：萨拉姆和Ward 提出以规范原理作为量子场论的基础[97]。同年，格拉肖提出了 $SU(2) \times U(1)$ 的弱作用规范群，引入了产生短程中性流的重 $Z^0$ 玻色子[98]，用两个中性规范玻色子( $W_\mu^3, B_\mu$ )的混合来产生弱作用的宇称破坏，推广了由许温格提出的电弱理论。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

10. **1964年**: J.D. Bjorken 和格拉肖提出存在第4种夸克的假设[99]。

1964年, J.H. Christenson, J. Cronin和V. Fitch 等人首次在美国布鲁克海文实验室的K介子实验上发现 $K^0$ 介子系统中的CP破坏的证据[50]。关于K、B介子系统CP破坏的研究是近50年来国际理论物理和实验物理中一直非常活跃的领域。

1964年, 萨拉姆和J.C. Ward 独立的提出了与许温格模型类似的电弱统一模型, 引入了同样的规范群结构, 并估计了W玻色子的质量[100]。萨拉姆确信电弱统一模型一定是规范理论, 但当时要产生规范对称性的破缺, 要给规范玻色子以质量, 只能用手放进去。但这就破坏规范理论拉氏量的规范不变性, 破坏理论的可重整性。

♣ 1964年8月, 弗朗索瓦·恩格勒和罗伯特·布劳特发表了关于规范对称性自发破缺的论文[101]。同年9月和10月, 彼得·希格斯的两篇相关论文发表[102]。这三位学者在他们的论文中提出了一种通过规范对称性自发破缺而使规范粒子获得质量的机制: Higgs机制。同年11月, G. Guralnik, C. Hagen和T. Kibble发表论文, 提出了同样的规范对称性自发破缺机制[103]。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

11. **1967年**: T.W.B. Kibble 把Higgs机制推广到非阿贝尔规范场论[104]。

1967年, 温伯格把Higgs机制和 $SU(2) \times U(1)$ 模型放到一起, 提出了描写轻子的电磁作用和弱作用统一的理论, 并估计了 $W$ 和 $Z^0$ 玻色子的质量[105,106]。

1967年, 萨拉姆独立的提出了电弱统一模型。他于1967年秋季在伦敦帝国学院做了关于“电弱模型”的学术报告, 并在1968年瑞典的学术会议上报告了相关研究成果[107,108]。萨拉姆首先使用了英文表述: “Electroweak Theory”。在1967年, 萨拉姆和温伯格都认为他们的“电弱相互作用理论”是可重整的, 但是没有证明。

12. **1971年**: G. 't Hooft 和M.J.G. Veltman 完成了对具有自发破缺规范对称性的有质量和无质量的杨-米尔斯规范场可重整性的严格证明[109]。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

13. **1973年**: **Gargamelle** 中微子国际合作组首次在欧洲核子研究中心(CERN)的 $\nu_\mu e$  和 $\nu_\mu N$ 散射实验中发现了由 $Z^0$ 玻色子引起的弱中性流存在的证据:

$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_\mu + e^-, \quad \nu_\mu + N \longrightarrow \nu_\mu + N.$$

其领头阶费曼图如图-8.1所示。这是电弱统一理论的一个重要预言，它的发现使电弱统一理论成为被广泛接受的理论。

♣ 实验测量了中性流事例和带电流事例的比率，从而估计了温伯格角 $\sin^2 \theta_W$ 的值在0.3到0.4之间。它也促成了人们预言W、Z玻色子的质量大小。并设计实验来探测它们。起初，物理学家只用一个SU(2)的群来统一电弱相互作用，规范玻色子是 $W^\pm$ 和光子。但是这样的理论马上遇到了问题，一是电磁相互作用的宇称可能破坏，另外，光子和 $W^\pm$ 的质量差别也太大了。中性弱流的发现确立了在SU(2)之外还需要引进一个U(1)规范场。

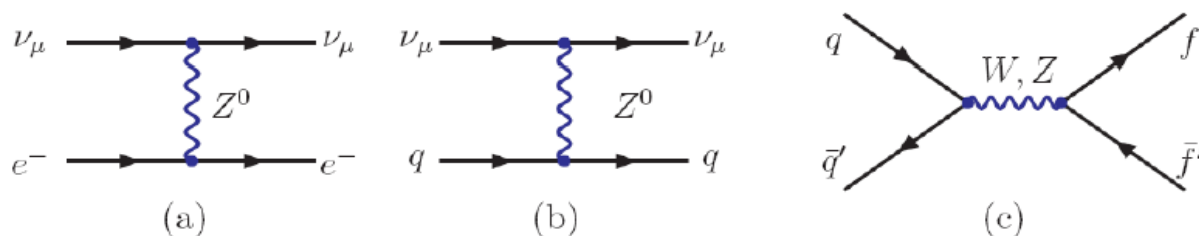


Figure: 8.1 (a,b) 实验上发现的中性弱流的领头阶费曼图。(c)由交换 $W^\pm, Z^0$ 引起的 $2 \rightarrow 2$  s-道产生过程的领头阶费曼图。



# 1. 电弱相互作用理论发展简史

14. **1974年**: 费米实验室的实验也证实了弱中性流存在于在如下的反应中

$$\nu_{\mu} + N \longrightarrow \nu_{\mu} + X.$$

15. **1983年**: 由**C. Rubbia** 领导的**UA1** 实验组和**P. Darriulat** 领导的**UA2**实验组在**CERN** 的**pp**对撞机实验中发现了带电和中性的中间矢量玻色子 **$W^{\pm}$** 和 **$Z^0$**

$$p + \bar{p} \rightarrow W(\rightarrow l + \nu) + X,$$

$$p + \bar{p} \rightarrow Z^0(\rightarrow l^+ + l^-) + X.$$

其领头阶费曼图在图-8.1(c)中给出。实验测量得到的 **$W^{\pm}$** 和 **$Z^0$** 玻色子质量与电弱统一理论的预言符合的很好。这是支持电弱统一理论的又一关键实验证据。

16. **1987年**: **ARGUS** 实验组在**DESY**实验室**DORIS**存储环的**ep**对撞实验中, 首次发现了 **$B^0 - \bar{B}^0$** 混合的实验证据: 实验测量得到的中性**B**介子混合 **$\Delta M(B_d^0) \sim 0.5 ps^{-1}$** , 比预期的理论值大很多。由于顶夸克可以通过箱图影响 **$\Delta M$** 的理论预言值, 那么根据实验测量得到的大的 **$\Delta M$** , 可以间接推论: 顶夸克有很重的质量。这是顶夸克很可能具有重质量( **$m_t \geq 80 \text{ GeV}$** ) 的第一个实验信号。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

17. **1989-2000:** 在欧洲核子研究中心**LEP**正负电子对撞机上工作的**4**个实验组**ALEPH, DELPHI, L3** 和**OPAL** 开始了他们对中间矢量玻色子 **$Z^0$** 和 **$W^\pm$** 的产生和衰变过程的精细研究, 对其质量做了高精度测量, 对电弱统一理论的很多理论预言在**1%**的精度进行了精确检验[110]。
18. **1999年:** 在**CERN**工作的**NA48**实验组和在**FeimiLab**工作的**KTeV**实验组, 在发现**K**介子系统的间接**CP**破坏**35**年之后最终发现了 **$K^0$** 介子系统的直接**CP**破坏:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) = \begin{cases} (18.5 \pm 4.5 \pm 5.8) \times 10^{-4} & \text{NA48,} \\ (28.0 \pm 3.0 \pm 2.8) \times 10^{-4} & \text{KTeV.} \end{cases} \quad (8.17)$$

19. **1999-2011年:** 在美国**SLAC**和日本**KEK**的两个**B**介子工厂在**1999**年夏天投入运行。**BaBar**实验组在**2008**年**4**月停止运行, 日本的**Belle**实验组在**2010**年底停止运行, **B**介子工厂实验发现了**B**介子系统的**CP**破坏, 实验支持基于**CKM**矩阵夸克混合对**K, B**介子系统**CP**破坏的理论解释, 直接导致**M. Kobayashi**和**T. Maskawa**两位日本物理学家获得**2008**年诺贝尔物理奖。两个**B**介子工厂实验获得的一系列重要成果推动了物理学的发展[111]。

# 1. 电弱相互作用理论发展简史

---

1995: Tevatron上的D0 和CDF实验发现了顶夸克

2008...LHC时代,

2012年Higgs粒子的发现。。。。

## 2. GIM机制和CKM矩阵

---

# 2.1 夸克混合

$$\begin{aligned}\beta\text{-decay} &: n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ \mu\text{-decay} &: \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \\ \mu\text{-capture} &: \mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu.\end{aligned}$$

♣ 实验上观测到奇异数改变 ( $\Delta S = 1$ ) 的弱衰变被大大压低。例如，中子的 $\beta$ 衰变宽度远大于超子 $\Lambda$ 的 $\beta$ 衰变宽度：

$$\Gamma_{\Delta S=0}(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}) \gg \Gamma_{\Delta S=1}(\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu})$$

奇异粒子的半轻子衰变 $\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$ 是 $\Delta S = 1$ 的奇异数改变过程，实验发现它比 $\Delta S = 0$ 的过程 $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ 被压低大约20倍。另外上面的中子 $\beta$ 衰变中的费米耦合常数 $G_F$ 比 $\mu$ 子衰变 $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ 中的 $G_F$ 也小一点。

♣ 1963年，卡比玻引入卡比玻角和强子弱流[53]。上面的实验结果都能很好地被卡比玻的理论解释。在这个理论中，轻子是以味道本征态来参加弱相互作用的，而夸克则不是。**d**和**s**夸克要先混合再参加弱相互作用。他们的混合用卡比玻角 $\theta_c$ 来描写，即夸克弱相互作用的二重态是

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}.$$

在夸克的弱相互作用中，费米耦合常数 $G_F$ 其实是和轻子中的一样的。只是在 $\Delta S = 0$ 的过程中（中子 $\beta$ 衰变）涉及到上面的**u**和**d**夸克。因而有效耦合是 $G_F \cos \theta_c$ ，而对于 $\Delta S = 1$ 的奇异数改变过程，涉及到**u**和**s**夸克，因而正比于 $G_F \sin \theta_c$ ，实验给出 $\theta_c \sim 12^\circ$ ， $\sin \theta_c \sim 0.22$ ， $\sin^2 \theta_c \sim 0.05$ ，所以是大约20倍。 $\cos^2 \theta_c \sim 0.95$ ，所以中子的 $\beta$ 衰变中的费米耦合常数 $G_F$ 只比 $\mu$ 介子衰变中的小一点。

## 2.1 夸克混合

♣ 事实上，轻子弱流类似，强子弱流可写为

$$J_{\mu}^h = \bar{d}\gamma_{\mu}(1 - \gamma_5)u + \bar{s}\gamma_{\mu}(1 - \gamma_5)u.$$

上式中第一项可解释  $\bar{d}u$  的跃迁，而第二项解释  $\Delta S = 1$  的过程。那么，强子流用新的相互作用本征态  $\bar{d}'$  来描写应为

$$J_{\mu}^h = \bar{d}'\gamma_{\mu}(1 - \gamma_5)u = \cos\theta_c\bar{d}\gamma_{\mu}(1 - \gamma_5)u + \sin\theta_c\bar{s}\gamma_{\mu}(1 - \gamma_5)u.$$

## 2.2 GIM 机制

♣ 在早期的实验上发现，中性弱流的选择规则是 $\Delta S = 0$ ，也就是说，没有味道改变的树图中性流。奇异数改变的中性流衰变没有被实验观测到。例如，实验对味道改变中性流的K介子衰变有很强的上限：

$$\frac{Br(K^+ \rightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu})}{Br(K^+ \rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu)} < 10^{-5}.$$

♣ Cabibbo理论虽然可以很好地解释味改变带电流过程，但是在当时解释上面提到的中性流实验时却遇到了困难。类似于 $Z^0$ 和 $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$ ,  $\nu_e\bar{\nu}_e$ ,  $\nu_\mu\bar{\nu}_\mu$ 的轻子中性流耦合， $Z^0$ 会和 $u\bar{u}$ ,  $d'\bar{d}'$ 耦合。前者没有问题，被实验验证，但是后者却出了问题，由\_\_\_\_\_可得

$$\begin{aligned}d'\bar{d}' &= (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c)(\bar{d} \cos \theta_c + \bar{s} \sin \theta_c) \\ &= (d\bar{d} \cos^2 \theta_c + s\bar{s} \sin^2 \theta_c) + (s\bar{d} + d\bar{s}) \cos \theta_c \sin \theta_c.\end{aligned}$$

其中第一项是 $\Delta S = 0$ 的过程，实验上是有的，但是后一项是 $\Delta S = 1$ 的中性流过程，但当时的实验却没有发现味道改变的中性流衰变过程。

400

## 2.2 GIM 机制

♣ 1970年，格拉肖，Iliopoulos和Maiani引进了一个新的夸克[69]，叫“charm”。这样就多了一个二重态，包括c夸克和s、d的组合s'（正交于前面的d'），两个弱相互作用的旋量态

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \cos \theta_c - d \sin \theta_c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

新增加的二重态会给出 $Z^0$ 耦合新的贡献

$$\begin{aligned} s' \bar{s}' &= (s \cos \theta_c - d \sin \theta_c)(\bar{s} \cos \theta_c - \bar{d} \sin \theta_c) \\ &= (s \bar{s} \cos^2 \theta_c + d \bar{d} \sin^2 \theta_c) - (s \bar{d} + d \bar{s}) \cos \theta_c \sin \theta_c. \end{aligned}$$

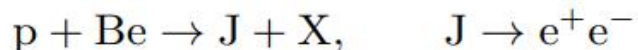
把上面两式相加，就会看到 $\Delta S = 1$ 的味道改变中性流耦合抵消掉了。剩下的对角的 $d \bar{d}$ 和 $s \bar{s}$ 耦合的前面的系数也没有了 $\theta_c$ 的三角函数，而都变成了1，也就是说 $Z^0$ 与不同代的夸克弱作用耦合是相同的。

♣ 因此，引进新的第四种夸克“charm”以后，不想要的奇异数改变的中性流被抵消了，夸克和轻子的带电流弱作用普适性推广到了中性流。GIM预言的c夸克也在1974年（4年后）被发现[70]。甚至新夸克的质量也在其发现前通过 $K^0 - \bar{K}^0$ 的质量差给出了预言。



# 2.2 GIM 机制

1974 年实验证实了 GIM 机制设想的正确性。丁肇中教授领导的实验组在布鲁克海文国家实验室 30GeV 质子交变梯度加速器 AGS 上的实验中发现了一个大质量长寿命的新粒子<sup>[5]</sup>，命名为 J。这是一个固定靶实验，



J 由其衰变的  $e^+$ 、 $e^-$  重建。探测器是一个双臂谱仪，图 1.5 给出了谱仪一个臂的侧视图，每个臂相对于质子束流入射方向的夹角为  $14.6^\circ$ ， $M_1$  和  $M_2$  是两个偏转磁铁，使得具有确定偏转角和动量的正负电子被谱仪探测到。图 1.6 是实验测到的  $e^+e^-$  不变质量谱，峰值在 3.1GeV，宽度很窄。即使将偏转磁铁的电流减少 10%，所测得的不变质量谱的峰位仍然不变，也被标示在图 1.6 中。

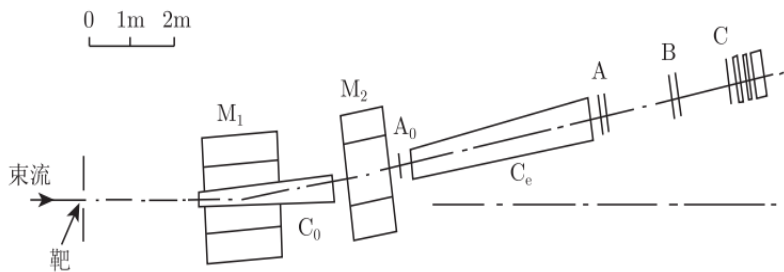
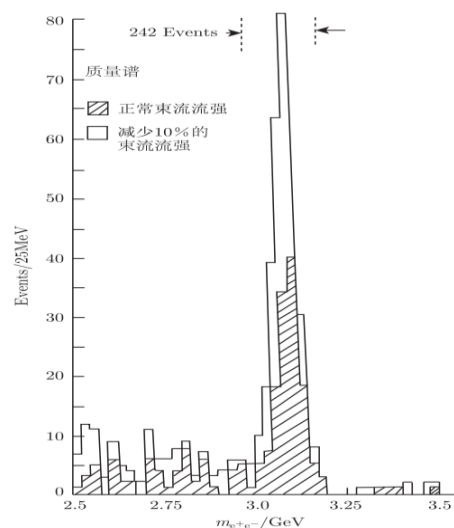


图 1.5 发现 J 粒子的双臂谱仪简化侧视图

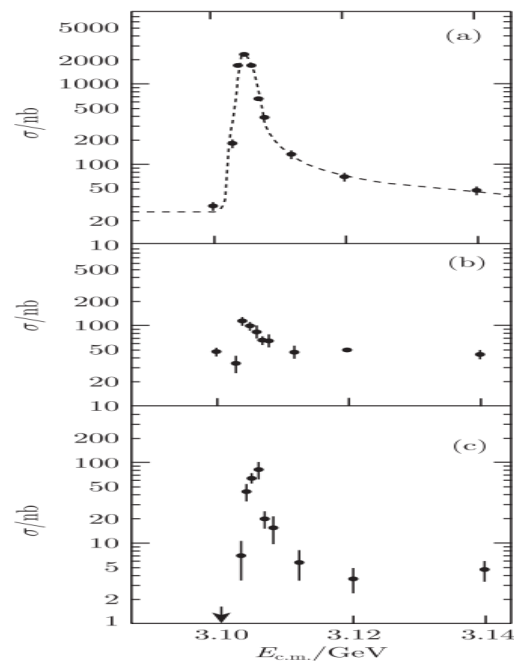


## 2.2 GIM 机制

几乎在同一时间，B. Richter 领导的实验组在 SLAC 的 SPEAR 正负电子对撞机上也发现了该粒子<sup>[6]</sup>，命名为  $\psi$ ，他们给出了该共振态的参数，

$$E = (3.105 \pm 0.003)\text{GeV}, \quad \Gamma \leq 1.3\text{MeV}$$

并给出了它的自旋、宇称和电荷共轭宇称值  $J^{PC} = 1^{--}$ 。图 1.7是他们发表的测量结果。



## 2.3 CKM夸克混合矩阵

♣ 考虑 $(u, d, s, c)$ 四味夸克，为了使强子弱流是普适的，即具有同一耦合常数 $G_F$ ，同时又能解释奇异数改变过程被大大压低的实验事实，卡比玻引入一个混合角 $\theta_c$ ，GIM机制给出了一个 $2 \times 2$ 的混合矩阵，它描述了夸克的质量本征态和弱作用本征态的相对关系：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

式中 $(d, s)$ 和 $(d', s')$ 分别是质量本征态和弱作用本征态。混合矩阵需要用一个参数卡比玻角 $\theta_c$ 来描写。所有的与 $(u, d, s, c)$ 夸克有关的弱衰变都与这个唯一的参数一致。

♣ 由于历史的原因，我们现在用下夸克的混合来描写弱相互作用，实际上，这只是一个习惯约定，我们也可以用两个上夸克的混合来描写

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}$$

同样也可以使上下夸克都混合。

♣ 需要指出的是，夸克混合的一个必要条件是夸克的质量不相同。如果 $m_s = m_d$ ，或者 $m_u = m_c$ ，就没有办法通过其质量来区分两种夸克，也就无所谓混合。如果中微子质量为0，同样没有混合。如果不同代中微子有不同的小质量，也会有混合矩阵，也将有CP破坏。

## 2.3 CKM夸克混合矩阵

♣ 1973年，在GIM机制预言的第四个夸克“charm”还没有被实验发现的情况下，日本学者小林诚(M. Kabayashi)和益川敏英(T.Maskawa)把卡比玻的两代4夸克混合推广到了包含三代6夸克的情形，提出了描写三个下夸克混合的 $3 \times 3$  CKM混合矩阵[53]。

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_L = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L .$$

矩阵元都是复数的，所以是 18 个变量。1973 年小林诚 (Kobayashi) 和益川敏英 (Maskawa) 首先完成了它的参数化。矩阵么正性的要求给出 9 个约束条件，

$$V_{\alpha\beta}^\dagger V_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} .$$

还可以将一个相角吸收到每一个左手态中，

$$q_L = e^{i\alpha(q_L)} q_L ,$$

这样就去除了各列和各行相角的任意性。但由于  $V$  在一个共同的相角变换下是不变的，所以可以去掉  $6 - 1$  个相角自由度。这样在  $CKM$  矩阵中独立的物理参数就只剩下 4 个。

## 2.3 CKM夸克混合矩阵

♣ CKM矩阵有4个独立变量：3个混合角和一个CP破坏相角，可以在电弱统一理论的框架内解释实验上发现的K、B介子系统的CP破坏。

M. Kobayashi和T. Maskawa的CKM混合矩阵得到两个B介子工厂实验的证明，因而获得2008年诺贝尔物理奖。粒子数据表推荐的CKM矩阵参数化形式为：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}.$$

这是个么正矩阵。 $V^\dagger V = VV^\dagger = I$ 的么正性要求，每一列或每一行的元素的平方和为1。每两列或每两行的元素的乘积和为0。三个数的和为0，可以形成一个三角形。其中只有两个三角形各个边的大小相当，形成较好的三角形，也叫么正三角形。么正矩阵中的相角 $\delta \neq 0$ 意味着弱相互作用的CP不守恒。

实验上测得CKM矩阵对角矩阵元的数值都在1的量级，而非对角的矩阵元数值都比较小。现有的实验数据在90%的置信度下给出，

$$V = \begin{pmatrix} 0.9739 - 0.9751 & 0.221 - 0.227 & 0.0029 - 0.0045 \\ 0.221 - 0.227 & 0.9730 - 0.9744 & 0.039 - 0.044 \\ 0.0048 - 0.014 & 0.037 - 0.043 & 0.9990 - 0.9992 \end{pmatrix}.$$

混合角的区间为，

$$s_{12} = 0.2243 \pm 0.0016, \quad s_{23} = 0.0413 \pm 0.0015, \quad s_{13} = 0.0037 \pm 0.0005.$$

## 2.3 CKM夸克混合矩阵

♣  $V$  是粒子数据表(PDG)给出的严格表达式。反应的是旋转矩阵和么正矩阵的乘积：

$$V = R_2(-\theta_2)R_1(-\theta_1)D(\delta - \pi)R_2(\theta_3),$$

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} e^{i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ；四个独立参数是三个旋转角  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{13}$  和一个 CP 相位  $\delta$ 。很显然，如果  $s_{13} = 0$  或者  $\sin \delta = 0$ ，CKM 矩阵  $V$  就是实数矩阵，CP 破坏就不存在。当然，如果  $s_{12} = 0$ ，我们可以通过重新定义夸克场的相角证明 CKM 矩阵也可以写成实数矩阵，这反映了 CKM 矩阵参数化的非唯一性。

♣ C. Jarlskog 在 1985 年给出了么正矩阵是实数矩阵，即是否存在 CP 破坏的一般条件 [112]。对于  $i \neq k, j \neq l$  的任意矩阵乘积  $V_{ij} V_{kl} V_{il}^* V_{kj}^*$  的虚部都是相等的，如果这个虚部不为 0，CKM 矩阵就不是实数的。例如

$$J = \text{Im}(V_{11} V_{22} V_{21}^* V_{12}^*) = c_{12} c_{13}^2 c_{23} s_{12} s_{13} s_{23} \sin \delta. \quad (8.30)$$

反映的就是 CP 破坏程度的大小。相角非零，拉氏量不完全是实的，违反了时间反演不变性，导致 CP 破坏

## 2.3 CKM夸克混合矩阵

♣ CKM混合矩阵有多种参数化形式，最常用的是  的Wolfenstein形式(四个参数( $A, \lambda, \rho, \eta$ )), 但是那个形式虽然对于各个矩阵元的相对大小一目了然, 却只是个近似表达式。

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4).$$

该表达式已经考虑了CKM矩阵的么正性:  $V^\dagger V = VV^\dagger = 1$ 。

♣ 在次领头阶近似下, CKM矩阵可以写为

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{8} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda + A^2\lambda^5(\frac{1}{2} - \rho - i\eta) & 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \lambda^4(\frac{1}{8} + \frac{A^2}{2}) & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) + A\lambda^5(\rho + i\eta) & -A\lambda^2 + A\lambda^4(\frac{1}{2} - \rho - i\eta) & 1 - \frac{A^2\lambda^4}{2} \end{pmatrix}.$$

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

## 么正群

从前面介绍中可以看到，一些物理内容完全不同的对称性，由于形式上相似，可以使用同一种类型的群来描写。例如，几种相加性量子数的守恒定律 ( $Q$ 、 $B$ 、 $L_e$ 、 $L_\mu$ 、 $S$  等守恒定律)，都可以使用  $U(1)$  群描写。核子自旋、空间转动和同位旋对称性等都可以使用  $SU(2)$  群描写，而  $SU(3)$  群则可用来描写层子味道或颜色的么正不变性等。下面简单介绍几种粒子物理中常用的么正群。



# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

## U(1)规范不变性

♣ 前面讨论了 $Q, L, B, S$ 等相加性量子数的守恒定律。这些守恒定律的实质在于物理规律在 $U(1)$ 规范变换下的不变性。由于系统的相位不能绝对测量，因此，在对系统的波函数 $\psi_Q$ 做相位变换

$$\psi_Q \longrightarrow \psi'_Q = e^{i\lambda Q} \psi_Q$$

时，应有规范不变性。即 $\psi_Q$ 、 $\psi'_Q$ 均满足薛定谔方程：

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_Q = \hat{H} \psi_Q;$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi'_Q = \hat{H} \psi'_Q;$$

其中 $\psi_Q$ 为具有电荷 $Q$ 的系统状态波函数。 $\lambda$ 是与时空点无关的任意实参数。 $Q$ 为电荷算符，也是这种变换的生成元。 | 可得

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_Q = \left[ e^{-i\lambda Q} \hat{H} e^{i\lambda Q} \right] \psi_Q$$

规范不变性要求

$$e^{-i\lambda Q} \hat{H} e^{i\lambda Q} = \hat{H}$$

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

考虑无穷小变换, 可得  $(1 - i\lambda\hat{Q})\hat{H}(1 + i\lambda\hat{Q}) = \hat{H}$

$$[Q, \hat{H}] = 0$$

即, 电荷守恒。可见系统的规范不变性要求电荷算符与系统的哈密顿量对易

♣ 这种变换是一种连续变换, 变换元素的全体构成  $U(1)$  群。它所对应的量子数是相加性的。如果一个系统包含  $n$  个粒子, 分别具有电荷量子数  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , 在系统的总波函数进行变换时, 各粒子波函数分别进行变换:

$$\psi'_Q = e^{i\lambda Q_1} \dots e^{i\lambda Q_n} \psi_Q = e^{i\lambda Q} \psi_Q$$

其中

$$Q = \sum_i^n Q_i$$

即系统的总电荷守恒。

♣ 若把上式中的电荷算符  $Q$  换成重子数  $B$  等可加性量子数, 用类似的方法可以证明, 这些  $U(1)$  规范变换分别导致相应的量子数守恒定律。

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

## SU(2)群和同位旋

♣ 同位旋空间的旋转不变性，可以用SU(2)群来描写。SU(2)群的基础表示是二维表示，基矢是协变基矢

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SU(2)群元素作用于此协变基矢上得到基础表示。任一态矢量可以表示成 $\phi_1, \phi_2$ 的线性组合

$$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

♣ 当我们用SU(2)群描写同位旋空间的旋转不变性时，常用 $u = \phi_1$ ,  $d = \phi_2$ 来表示 $I_3 = \pm 1/2$ 的粒子。对质子-中子系统， $u, d$ 分别表示质子和中子

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

在绕某一轴，例如 $I_2$ 轴转动 $\theta$ 角度时，有

$$\chi' = U\chi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \chi$$

$$X'^{\dagger} X' = X^{\dagger} \hat{U}^{\dagger} \hat{U} X = X^{\dagger} X$$

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

♣ 变换函数  $U$  的一般形式可以写为

$$U = \exp \left[ \frac{1}{2} i \theta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right]$$

对于无穷小变换  $\delta\theta$ , 有

$$X' \rightarrow X + \delta X, \quad \delta X = i \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) X$$

其中  $\theta$  表示绕  $\mathbf{n}$  轴的转动角。  $\sigma$  是我们所熟知的泡利矩阵, 无穷小变换的生成元  $SU(2)$  群是么模性和么正性要求, 泡利矩阵满足要求

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\sigma$  矩阵与  $SU(2)$  同位旋群生成元  $\vec{S}$  之间的关系为  $S_i = \sigma_i/2$ ,  $S_i$  或  $\sigma_i$  之间的其他对易关系与量子力学中相同, 例如对易关系

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

其中的  $\epsilon_{ijk}$  是  $SU(2)$  群的结构常数。

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

容易证明矩阵  $\frac{1}{2}\hat{\sigma}_3$  作用到它的本征态  $u, d$  上时, 分别得到本征值  $+\frac{1}{2}$  和  $-\frac{1}{2}$ 。  
矩阵

$$\hat{\sigma}_{\pm} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_1 \pm i\hat{\sigma}_2)$$

被称为升、降算符, 因为它作用到  $u, d$  上时将其改变到  $\frac{1}{2}\hat{\sigma}_3$  算符本征值升、降一个单位的态, 例如,

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_+ u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \hat{\sigma}_+ d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u \end{cases}$$

它们满足对易关系

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2}\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_{\pm} \right] &= \pm\hat{\sigma}_{\pm} \\ [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] &= 2\left(\frac{1}{2}\hat{\sigma}_3\right) \end{aligned}$$

可以用这些生成元组成一个能和这个群中所有算符对易的算符, 称为卡西米尔 (Casimir) 算符,

$$\hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+) + \frac{1}{4}\hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{4}(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2) = \left(\frac{1}{2}\hat{\sigma}\right)^2$$

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

## SU(2)群的N维表示

♣ 可以把二维情况的结果推广到N维情况。用 $\hat{S}^2$ 和 $\hat{S}_3$ 的共同本征态来描写粒子态。对每一个不可约表示（对于给定的S）， $\hat{S}^2$ 的本征值为 $S(S+1)$ 是一个固定值。在此表示内的多重态可以用 $S_3$ 的不同本征值来区别。

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

## SU(2)群的N维表示

♣ 如果能够找到一组  $N \times N$  维矩阵  $I, I_1, I_2, \dots, I_N$ , 同样能够满足对易关系

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k$$

那么就说他们构造了SU(2)群代数的一个N维表示。同位旋为I的多重态有  $(2I + 1)$  个成员：例如对  $\pi$  介子,  $I = 1$ , 有三个成员, 分别为  $\pi^\pm, \pi^0$ 。

♣ 一般地说, SU(N)群的基础表示为N, 其共扼表示为  $N^*$ 。对SU(2), 2和  $2^*$  在转动中具有相同的变换方式。而对于  $N \geq 3$  情况则不同。例如, SU(3)的表示3与  $3^*$  在转动中具有不同的变换方式。

♣ SU(N)群的正则表示: SU(N)群生成元最简单的表示是  $N^2 - 1$  个厄米无迹  $N \times N$  矩阵。例如, SU(2)群生成元最简单的表示是3个泡利矩阵。用这些矩阵, 我们可以定义SU(N)群的  $N^2 - 1$  维表示, 称为正则表示。

♣ 在SU(2)的情况下, 如果取  $\hat{S}_3$  为对角形式, 则三维矩阵表示为:

$$\hat{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

它们满足SU(2)代数。以本征态 ( $I = 1$ ) 作为基矢,  $\hat{S}_3$  作用于其上时, 得到本征值  $S_3 = 1, 0, -1$ 。例如。  $\pi$  介子的三个荷电状态:  $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ , 就属于SU(2)同位旋群的一个三维表示。

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

## SU(3)群和同位旋

♣ 如果我们把基矢由 $u, d$ 扩大到 $u, d, s$ , 则可将SU(2)群扩充为SU(3)群。SU(3)群的基础表示为

$$\phi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

其中

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

把变换定义为

$$\phi' = U\phi$$

其中

$$U = \exp \left[ \frac{1}{2} i \theta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda} \right]$$

和SU(2)中的 $\sigma$ 相似,  $\lambda$ 是8个独立的厄密无迹 $3 \times 3$ 矩阵。1962年盖尔曼给出的8个 $\lambda_i$ 矩阵



# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

1962年盖尔曼给出了矩阵表示为： $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  泡利矩阵

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

清楚地看到  $SU(3)$  中包括了  $SU(2)$  子群的结构。容易看出,  $\lambda_1$ 、 $\lambda_4$ 、 $\lambda_6$  和  $\sigma_1$  相似, 只是多了一个元素为零的行和列。同样地,  $\lambda_2$ 、 $\lambda_5$ 、 $\lambda_7$  和  $\sigma_2$  很像,  $\lambda_3$  和  $\sigma_3$  相似,  $\lambda_8$  在  $SU(2)$  中没有相似的算符与之对应。它和  $\lambda_3$  对易, 所以  $SU(3)$  群是 2 秩的。

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

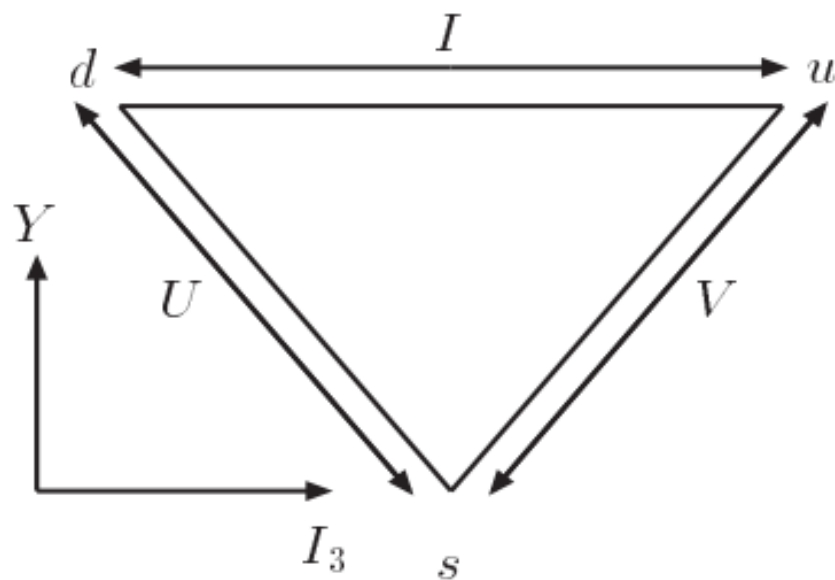
♣  $SU(3)$ 群包含3个 $SU(2)$ 子群:

(a)  $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 构成(u,d)同位旋 $SU(2)$ 群,  $F_3 = \lambda_3/2$ 是和 $I_3$ 对应的算符;

(b)  $\lambda_6$ 和 $\lambda_7$ 构成(d,s)U旋 $SU(2)$ 群;

(c)  $\lambda_4$ 和 $\lambda_5$ 构成(u,s)V旋 $SU(2)$ 群。

这样,  $SU(3)$ 三重态包含 $I$ ,  $U$ ,  $V$ 三个 $SU(2)$ 二重态。



# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

♣ 重子数  $B$ ,  $I_3$  和  $Y$  与  $\lambda_i$  的关系是

$$B = \frac{1}{3}\lambda_0, \quad I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$$

其中  $\lambda_0$  为单位矩阵。矩阵  $\lambda_i/2$  的对易和反对易关系为

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2}\lambda_i, \frac{1}{2}\lambda_j \right] &= if_{ijk} \left( \frac{1}{2}\lambda_k \right), \\ \left\{ \frac{1}{2}\lambda_i, \frac{1}{2}\lambda_j \right\} &= \frac{1}{3}\delta_{ij} + d_{ijk} \left( \frac{1}{2}\lambda_k \right) \end{aligned}$$

其中  $SU(3)$  群的结构常数  $f_{ijk}$  是反对称的,  $d_{ijk}$  是对称的。他们的非零独立元素值如下

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{237} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2, \\ f_{458} &= f_{678} = \sqrt{3}/2, \\ d_{118} &= d_{228} = d_{338} = -d_{888} = 1/\sqrt{3}, \\ d_{146} &= d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = 1/2, \\ d_{247} &= d_{366} = d_{377} = -1/2, \\ d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

♣ 电弱统一理论的群结构及其在费米能标  $v \approx 246 \text{ GeV}$  附近的规范对称性破缺模式为：

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{\text{em}}.$$

电弱统一理论的粒子谱包含传递相互作用的规范玻色子、物质场部分的费米子和Higgs玻色子三个部分：

- 1. 规范场与规范玻色子：**自旋为1的规范玻色子属于规范群的伴随表示。规范玻色子  $W_\mu^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 和  $B_\mu$  分别属于  $SU(2)$  场和  $U(1)$  场。相对应的规范耦合常数分别为  $g, g'$ 。在对称性自发破缺之前，这些规范玻色子的质量为零，自旋为1。由于质量为零，自由粒子只能以光速运动，其自旋沿运动方向的投影只能是1或-1，亦即只有2个独立自旋分量。
- 2. 费米子场部分：**费米子是属于规范群的基础表示的物质场，由于质量为零，自由粒子只能以光速运动，并且左旋分量和右旋分量互相独立，完全分开。费米子的存在按照代来区分，每一代作为一个整体一起存在，包含三代轻子和夸克

$$Q_L = \begin{pmatrix} U_i \\ D_i \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L,$$

$$U_R = u_R, c_R, t_R,$$

$$D_R = d_R, s_R, b_R,$$

# 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L,$$
$$E_R = e_R, \mu_R, \tau_R, \dots$$

弱相互作用是左-右不对称的，左手和右手费米子有不同的量子数，其中左手场是 $SU(2)$ 的二重态，而右手场是 $SU(2)$ 的单态。所以右手费米子场不参与 $SU(2)$ 的规范相互作用。

3. **Higgs场部分：** 为了使费米子和规范玻色子在对称性自发破缺之后获得质量，需引入Higgs标量场。Higgs粒子是自旋为0的标量粒。最小电弱统一理论中，只有一个复数Higgs二重态

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}.$$

♣ 各粒子在 $SU(2)_L$ 规范变换下的性质可以用所属的表示的量子数-弱同位旋 $I$ 来描写。在 $U(1)_Y$ 规范变换下的性质可以用描写 $U(1)_Y$ 群表示的量子数-弱超荷 $Y$ 来描写，和强作用类似，弱同位旋和弱超荷也满足弱盖尔曼-西岛关系：

$$Q = I_3 + Y/2.$$

♣ 费米子的左右手场分别属于 $SU(2)_L$ 的二重态和单态， $I_3$ 就不同，左右手费米子场的 $Y$ 也不同。因此粒子在 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范变换下的性质可以用规范群量子数 $(I, Y)$ 来描写。上面所介绍各粒子的变换性质总结如表-8.1所示。

### 3. 电弱统一理论的群结构、拉氏量和粒子谱

Table: 8.1 基本粒子在  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范变换下的性质。

	规范玻色子		轻子		夸克			Higgs 粒子
粒子	$W^{1,2,3}$	$B^0$	$\nu_L, e_L$	$e_R$	$u_L, d_L$	$u_R$	$d_R$	$\phi^+, \phi^0$
(I, Y)	(1, 0)	(0, 0)	$(\frac{1}{2}, -1)$	(0, -2)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$(0, \frac{4}{3})$	$(0, -\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{2}, 1)$

# 3.0 U(1) 定域规范不变性

以狄拉克场为例，自由拉氏量密度可以写为

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi$$

其中

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger(x)\gamma^0$$

很显然这一拉氏量密度对整体 (global)U(1) 规范变换

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-i\alpha}\Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{i\alpha}$$

是不变的。其中  $\alpha$  是与空间  $x$  无关的实数。

# 3.0 U(1) 定域规范不变性

现在让我们考虑定域的 (local)U(1) 规范变换, 即

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-ieQ\alpha(x)}\Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{ieQ\alpha(x)}$$

这时变换相角是空间坐标点的函数。

对于无穷小变换, 即  $\alpha(x) \ll 1$  时, 我们有

$$\begin{cases} \delta\Psi(x) &= -ieQ\alpha(x)\Psi(x) \\ \delta(\partial_\mu\Psi(x)) &= \partial_\mu(\delta\Psi(x)) = -ieQ\alpha(x)\partial_\mu\Psi(x) - ieQ\partial_\mu(\alpha(x))\Psi(x) \\ \delta\bar{\Psi}(x) &= \bar{\Psi}(x)ieQ\alpha(x) \end{cases}$$

所以  $\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi$

$$\delta\mathcal{L}_0 = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\Psi}\delta\Psi + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\delta(\partial_\mu\Psi) + \delta\bar{\Psi}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\bar{\Psi}} = eQ\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\alpha(x) = eJ^\mu\partial_\mu\alpha(x)$$

这里  $J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu Q\Psi$  是电磁流。很容易证明  $J^\mu$  是规范不变的, 即

$$\delta J^\mu = 0$$

可见在定域规范变换下拉氏量密度不再是不变的。



# 3.0 U(1) 定域规范不变性

可见在定域规范变换下拉氏量密度不再是不变的。为了仍然保证拉氏量的不变性，可以引入一个新的四矢量规范场  $A_\mu(x)$ ，在原拉氏量上加上一个描写规范场和狄拉克费米子场相互作用的拉氏量，

$$\mathcal{L}_I = -eJ^\mu A_\mu$$

在  $\Psi(x)$  的定域  $U(1)$  规范变换下定义  $A_\mu$  的变换为

$$\begin{cases} A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \\ \delta A_\mu(x) = \partial_\mu \alpha(x) \end{cases}$$

于是有

$$\delta \mathcal{L}_I = -e(\delta J^\mu)A_\mu - eJ^\mu \delta A_\mu = -eJ^\mu \partial_\mu \alpha(x)$$

因而

$$\delta \mathcal{L}_0 + \delta \mathcal{L}_I = 0$$

$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$  是定域规范不变的。

# 3.0 U(1) 定域规范不变性

引入规范场  $A_\mu$  后，在总的拉氏量中还需要加入它的自由拉氏量。定义规范场张量为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$A_\mu$  规范不变的拉氏量可以记作

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

最后得到总的拉氏量密度为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_I = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

这里定义了

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu$$

称之为协变微分，即  $D_\mu\Psi$  的变换和  $\Psi$  同。

# 3.0 U(1) 定域规范不变性

可以证明如下：

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\Psi) &= \delta(\partial_\mu\Psi) + ieQ(\delta A_\mu)\Psi + ieQA_\mu\delta\Psi \\ &= -ieQ\alpha\partial_\mu\Psi - ieQ(\partial_\mu\alpha)\Psi + ieQ(\partial_\mu\alpha)\Psi + e^2Q^2A_\mu\alpha\Psi \\ &= -ieQ\alpha(x)(\partial_\mu + ieQA_\mu)\Psi \\ &= -ieQ\alpha(x)D_\mu\Psi\end{aligned}$$

即

$$D_\mu\Psi(x) \rightarrow (D_\mu\Psi(x))' = e^{-ieQ\alpha(x)} D_\mu\Psi(x)$$

通过简单的计算也不难证明对易关系：

$$[D_\mu, D_\nu] = ieQF_{\mu\nu}$$

# 3.0 $U(n)$ 定域规范不变性

上面的讨论可以推广到更高的对称群  $SU(n)$  群。 $U(1)$  群是阿贝尔群，而  $SU(n)$  群则是非阿贝尔的，它有  $n^2 - 1$  个生成元，将对应于  $n^2 - 1$  个规范场。现在给出详细的推导。把  $n$  维狄拉克场记为

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

自由拉氏量密度为

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\Psi$$

其中， $M$  是狄拉克场的质量矩阵，

$$M_{ij} = m_i \delta_{ij}$$

# 3.0 $U(n)$ 定域规范不变性

很容易证明  $\mathcal{L}_0$  对整体  $SU(n)$  规范变换

$$\begin{cases} \Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U\Psi(x) \\ U = \exp(-iT^a\theta^a), \quad a = 1, 2, \dots, n^2 - 1 \end{cases}$$

是不变的。其中  $\theta^a$  是和  $x$  无关的  $n^2 - 1$  个实参数， $T^a$  是  $SU(n)$  群的  $n^2 - 1$  个生成元，满足对易关系：

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

$f^{abc}$  是群的结构常数。还有正交关系，

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

# 3.0 $U(n)$ 定域规范不变性

当参数  $\theta^a$  是空间坐标点的函数时,

定域的  $SU(n)$  规范变换,

$$\begin{cases} \Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U(x)\Psi(x) \\ U(x) = \exp(-iT^a\theta^a(x)) \end{cases}$$

这时

$$\partial_\mu\Psi \rightarrow (\partial_\mu\Psi)' \equiv \partial_\mu\Psi' = (\partial_\mu U(x))\Psi(x) + U(x)\partial_\mu\Psi(x)$$

$\partial_\mu\Psi$  是不协变的, 因此需要找到一个协变的微分  $D_\mu$ , 使得

$$(D_\mu\Psi)' = D'_\mu\Psi' = D'_\mu U(x)\Psi = U(x)D_\mu\Psi$$

所以应有

$$D'_\mu = U(x)D_\mu U^{-1}(x)$$

为此引入矢量规范场,

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a$$

# 3.0 U(n) 定域规范不变性

记

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$$

$g$  为常数。直接计算可得  $D_\mu$  的变换，

$$\begin{aligned} D_\mu \rightarrow D'_\mu &= \partial_\mu + igA'_\mu \\ &= U(x)(\partial_\mu + igA_\mu)U^{-1}(x) \\ &= \partial_\mu + U(x)\partial_\mu(U^{-1}(x)) + igU(x)A_\mu U^{-1}(x) \\ &= \partial_\mu - (\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) + igU(x)A_\mu U^{-1}(x) \end{aligned}$$

比较上式的第一个等式和最后一个等式，应有规范场  $A_\mu$  的规范变换，

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

对无穷小规范变换， $\theta^a(x) \ll 1$ ，

$$U(x) = 1 - iT^a \theta^a(x)$$

可求得

$$A_\mu^a \rightarrow A'^a_\mu = A_\mu^a + f^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)$$

# 3.0 U(n) 定域规范不变性

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\Psi$$

如果把规范场看成动力学场，那么还需引入规范场的拉氏量。让我们首先定义规范场的张量，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv F_{\mu\nu}^a T^a = -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c T^a \end{aligned}$$

或将它的分量形式写为

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

容易导得它的规范变换为

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}U^{-1}(x)$$

对于无穷小变换， $\theta(x) \ll 1$ ，可得

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F'^a_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a + f^{abc}\theta^b(x)F_{\mu\nu}^c$$

称  $F_{\mu\nu}^a$  (或  $F_{\mu\nu}$ ) 按  $SU(n)$  群的伴随表示  $(T^a)^{bc} = -if^{abc}$  变换。



# 3.0 U(n) 定域规范不变性

$-\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})/2$  是规范不变量, 因而用来定义规范场的拉氏量,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g &= -\frac{1}{2}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}\text{Tr}(T^a T^b) \\ &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\delta^{ab}\right) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}\end{aligned}$$

最后写出总的拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \\ &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - g\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu^a T^a \Psi\end{aligned}$$

其中,

$$\mathcal{L}_{g-\Psi} = -g\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu^a T^a \Psi = -gJ^{a\mu} A_\mu^a$$

描写了物质场  $\Psi$  与规范场的相互作用。

$$J^{a\mu} = \bar{\Psi}\gamma^\mu T^a \Psi$$

是  $SU(n)$  群的同位旋流,  $g$  是耦合常数。

# 3.0 $U(n)$ 定域规范不变性

注意到在该理论中规范粒子是没有质量的，否则就会破坏规范不变性的要求。另外考查规范场的拉氏量会发现，由于在张量  $F_{\mu\nu}^a$  中含有  $A_\mu^a$  的乘积项，因而在拉氏量  $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$  中就会出现  $A_\mu^a$  的三次和四次乘积项，反映了规范场之间的自相互作用。

上面的讨论可以总结为这样几句话：为保证  $n$  维狄拉克场的多重态在  $SU(n)$  定域规范变换下的不变性，必须引入  $n^2 - 1$  个没有质量的规范场。规范场与  $n$  维狄拉克场同位旋流的耦合确定了它们之间的相互作用。对于非阿贝尔规范群，除了描写规范场动量的散度项以外，还有反映规范场间自相互作用的规范场乘积项。

# 3.0 $U(n)$ 定域规范不变性

---

# 3.1 Yang-Mills场：非阿贝尔定域规范对称性

♣ 在强相互作用中，质子和中子构成同位旋二重态： $N = (p, n)$ 。当我们忽略掉电磁相互作用的影响时，在核力相互作用中质子和中子的差别可以忽略，故它们的波函数的任意组合是等价的，即

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \rightarrow \psi' = U\psi \quad (8.37)$$

其中 $U$ 是么正变换( $UU^\dagger = U^\dagger U = I$ )以保持几率的归一性。并且，如果 $\det|U| = 1$ ，那么 $U$ 就构成 $SU(2)$ 李群：

$$U = \exp\left(-i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}{2}\right) \approx 1 - i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}{2} \quad (8.38)$$

其中 $\theta_i$ 为 $SU(2)$ 群变换参数， $\tau^i$  ( $i=1,2,3$ )是 $2 \times 2$ 的泡利矩阵，是 $SU(2)$ 群的生成元，满足对易关系

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (8.39)$$

# 3.1 Yang-Mills场：非阿贝尔定域规范对称性

♣ 1954年，杨振宁和米尔斯将上述思想做了推广[94]，在量子场论中引进了定域规范的同位旋不变性的概念。他们认为，中子和质子的差别只是一个任意的约定。然而，按照传统观点，这种任意性要受到如下制约：一旦在一个时空点选定了什么是中子，什么是质子，那么我们在其它时空点就不再有任何选择的自由了。因此Yang-Mills理论与传统理论中所蕴含的定域场概念是不一致的。

♣ 按照他们的观点，无论在何时何地我们都要保持选择何为质子何为中子的自由。要实现这点，我们可以要求规范参数随时空点而变化，即 $\theta^i \rightarrow \theta^i(x)$ ，同时假定费米子场是 $SU(2)$ 同位旋二重态：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

在 $SU(2)$ 规范变换下，有

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp\left(\frac{-i\tau \cdot \theta(x)}{2}\right) \psi(x).$$

♣ 拉氏量 $\mathcal{L}_0$ 在整体( $\theta$ 与 $x$ 无关) $SU(2)$ 变换下保持不变。但是在定域 $SU(2)$ 规范变换下

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(\theta)\psi(x) = \exp\left(\frac{-i\tau \cdot \theta(x)}{2}\right) \psi(x),$$

$\mathcal{L}_0$ 不再保持不变。

自旋1/2的费米子狄拉克场的自由拉氏量，

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}(x)\not{\partial}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x).$$

# 3.1 Yang-Mills场：非阿贝尔定域规范对称性

♣ 我们下面根据定域SU(2)规范不变性导出矢量规范场 $A_\mu^i$  ( $i=1,2,3$ )，为了保持自由场拉氏量 $\mathcal{L}_0$ 在定域SU(2)规范变换下的不变性，我们必须引入三个矢量规范场 $A_\mu^i$  ( $i=1,2,3$ )，构造协变导数：

$$\partial_\mu \psi(x) \longrightarrow D_\mu \psi(x) = \left( \partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu}{2} \right) \psi(x).$$

上式中 $g$ 是类似于 $e$ 的耦合常数。我们要求 $D_\mu \psi$ 与 $\psi$ 有相同变换形式，即

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow (D_\mu \psi(x))' = U(\theta) (D_\mu \psi(x)).$$

这意味着

$$D'_\mu \psi' = \left( \partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}'_\mu}{2} \right) \cdot (U(\theta) \psi(x)) = U(\theta) \underbrace{\left( \partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu}{2} \right)}_{\text{}} \psi(x),$$

即

$$\left[ \partial_\mu U(\theta) - ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}'_\mu}{2} U(\theta) \right] \psi(x) = -ig U(\theta) \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu(x)}{2} \psi(x).$$

# 3.1 Yang-Mills场：非阿贝尔定域规范对称性

♣ 考虑到 $\psi(x)$ 的任意性，则有

$$\begin{aligned}\partial_\mu U(\theta) - ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu'}{2} U(\theta) &= -ig U(\theta) \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu(x)}{2}, \\ \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu'(x)}{2} &= U(\theta) \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu(x)}{2} U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta)] U^{-1}(\theta)\end{aligned}$$

这就定义了 $SU(2)$ 规范场的变换规则。考虑无穷小变换( $\vec{\theta}(x) \ll 1$ )

$$U(\theta) = 1 - i \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \theta(x)}{2}$$

(8.47)式变为(保留一级小量)

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu'(x)}{2} &= \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu(x)}{2} - i\theta^j A_\mu^k \left[ \frac{\tau_j}{2}, \frac{\tau_k}{2} \right] - \frac{1}{g} \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \partial_\mu \theta \right) \\ &= \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu}{2} + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \tau_i \theta_j A_\mu^k - \frac{1}{g} \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \partial_\mu \theta \right).\end{aligned}$$

或者

$$\left( A_\mu^i \right)' = A_\mu^i + \epsilon^{ijk} \theta_j A_\mu^k - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^i.$$

可知协变导数满足条件

$$D'_\mu = U(\theta) D_\mu U(\theta)^{-1}$$

# 3.1 Yang-Mills场：非阿贝尔定域规范对称性

♣ 为了导出规范场 $\mathbf{A}_\mu$ 的反对称二阶张量(与 $U(1)$ 规范变换中的场强张量 $F_{\mu\nu}$ 相对应), 考虑组合

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi(x) \equiv -ig \left( \frac{\tau^i}{2} F_{\mu\nu}^i \right) \psi(x)$$

式中

$$\frac{\tau \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu}}{2} = \partial_\mu \frac{\tau \cdot \mathbf{A}_\nu}{2} - \partial_\nu \frac{\tau \cdot \mathbf{A}_\mu}{2} - ig \left[ \frac{\tau \cdot \mathbf{A}_\mu}{2}, \frac{\tau \cdot \mathbf{A}_\nu}{2} \right]$$

即

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k.$$

可得

$$\begin{aligned} [(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi(x)]' &= (D'_\mu D'_\nu - D'_\nu D'_\mu) \psi'(x) \\ &= \left[ U(\theta) D_\mu U(\theta)^{-1} \cdot U(\theta) D_\nu U(\theta)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - U(\theta) D_\nu U(\theta)^{-1} \cdot U(\theta) D_\mu U(\theta)^{-1} \right] U(\theta) \psi(x) \\ &= U(\theta) \cdot (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi(x) \end{aligned}$$



# 3.1 Yang-Mills场：非阿贝尔定域规范对称性

♣ 把  $F_{\mu\nu}^i$  的定义 代入上式可得

$$\tau \cdot \mathbf{F}'_{\mu\nu} U(\theta) \psi(x) = U(\theta) \tau \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} \psi(x).$$

或者

$$\tau \cdot \mathbf{F}'_{\mu\nu} = U(\theta) (\tau \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu}) U(\theta)^{-1}$$

考虑无穷小变换(8.48)，则有

$$F_{\mu\nu}^{i'} = F_{\mu\nu}^i + \epsilon^{ijk} \theta^j F_{\mu\nu}^k$$

这与阿贝尔规范场情况不同， $F_{\mu\nu}^i$  并非不变，而是象  $SU(2)$  那样变换。然而乘积

$$\text{Tr} [(\tau \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu}) (\tau \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu})] \propto F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

却是  $SU(2)$  规范不变的：

$$\begin{aligned} \text{Tr} [(\tau \cdot \mathbf{F}'_{\mu\nu}) (\tau \cdot \mathbf{F}'^{\mu\nu})] &= \text{Tr} [U(\theta) (\tau \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu}) U^{-1}(\theta) U(\theta) (\tau \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu}) U^{-1}(\theta)] \\ &= \text{Tr} [(\tau \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu}) (\tau \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu})] = \text{Tr} (\tau^i \tau^j) F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu} \\ &= 2\delta_{ij} F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu} = 2F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}. \end{aligned}$$

# 3.1 Yang-Mills场：非阿贝尔定域规范对称性

♣ 我们可以将上述讨论归纳如下：描述SU(2)二重态与规范场 $\mathbf{A}_\mu$ 的拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + \bar{\psi}(x)\not{D}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x).$$

其中场强张量和协变导数的定义为

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon^{ijk}A_\mu^j A_\nu^k,$$
$$D_\mu\psi(x) = \left(\partial_\mu - ig\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{A}_\mu}{2}\right)\psi.$$

在SU(2)定域规范变换下，有

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\theta(x)}{2}\right)\psi(x) = U(\theta)\psi(x),$$
$$\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{A}_\mu}{2} \rightarrow \frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{A}'_\mu}{2} = U(\theta)\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{A}_\mu}{2}\right)U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\theta)]U^{-1}(\theta)$$

在无穷小变换下，有

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi - i\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\theta}{2}\psi,$$
$$A_\mu^i \rightarrow A_\mu^{\prime i} = A_\mu^i + \epsilon^{ijk}\theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i.$$

## 3.2 规范对称性一般情况

♣ 如果令规范群  $G$  是某一单纯李群，其生成元满足代数

$$[F^a, F^b] = iC^{abc} F^c, .$$

其中  $C^{abc}$  是全反称结构常数。假定  $\psi$  是属于表示矩阵为  $T^a$  的某一表示，则有

$$[T^a, T^b] = iC^{abc} T^c.$$

对应的协变导数是

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - igT^a A_\mu^a) \psi.$$

对应规范场的二阶场强张量为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ (\mathbf{T} \cdot \mathbf{F})_{\mu\nu} &= \partial_\mu (\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\nu) - \partial_\nu (\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu) - ig [\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu, \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\nu]. \end{aligned}$$

拉氏量

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(x) (i\partial - m) \psi(x) + g\bar{\psi}(x) \mathcal{A}^a T^a \psi(x).$$

在群  $G$  的如下变换下保持不变

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U(\mathbf{T} \cdot \theta) \psi \equiv U(\theta_x) \psi(x), \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu &\rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}'_\mu = U(\theta_x) \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu U^{-1}(\theta_x) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta_x)] U^{-1}(\theta_x). \end{aligned}$$

## 3.2 规范对称性一般情况

♣ 在无穷小变换下,有

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = \psi - i\mathbf{T} \cdot \theta \psi, \\ A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^{a'} = A_\mu^a + C^{abc}\theta^b A_\mu^c - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x).\end{aligned}$$

♣ 在拉氏量中, 纯Yang-Mills项 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ 的展开式中含有 $A_\mu^a$ 的三次方和四次方项:

$$-gC^{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu} A^{c\nu} - \frac{g^2}{4}C^{abc}C^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}.$$

它们对应于非阿贝尔规范场的自耦合项 (例如QCD中的三胶子和四胶子耦合项)。 另外一项

$$g\bar{\psi}(x) \mathcal{A}^a T^a \psi(x),$$

就是规范群 $G$ 的定域规范不变性所确定的物质场 $\psi(x)$ 与规范场 $\vec{A}_\mu$ 之间的相互作用, 耦合常数 $g$ 表征了相互作用强度。

♣ 此外与阿贝尔规范场情形相同, 规范场自作用项 $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ 中无质量项, 这与上节指出的规范场粒子无质量普遍结论相一致。

## 3.2 规范对称性一般情况

♣ 另外还需指出以下几点：

- (1) 无质量规范场的数量等于规范群 $G$ 的生成元的个数。
- (2) 在阿贝尔 $U(1)$ 规范场情形下，规范场与其它物质场的耦合强度无限制。因此电子携带电荷 $e$ ，而其它粒子原则上可携带任何电荷 $ne$ （如 $n = 1/3, 2/3$ 等）。

♣ 但在非阿贝尔情形下，如 $SU(2)$ 规范场，耦合强度将受到严格限制。如二重态 $\psi$ 与规范场 $A_\mu^a$ 的耦合强度为 $g$ ，而对于其它二重态 $\phi$ ，如耦合强度为 $ng$ ，则对易关系将要求（由规范不变性） $n^2 = n = 1$ 或 $n = 1$ 。

♣ 从本质上看，这是由于在非阿贝尔规范理论中，生成元对易关系的非线性性质导致了耦合强度 $g$ 不可能被随意改变。

- (3) 如上所述，对于单纯群 $G$ ，则只存在一个耦合常数。然而如果群是单纯群 $G_i$ 的乘积，如 $SU(3) \times SU(2)$ ，这里对于每一个单纯群的生成元集合在其对易关系下自身是闭合的，而对于不同群的生成元集合，它们彼此是对易的，则对于每一个因子群将存在其独立的相应的耦合常数。

# 3.3 无破缺的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论

弱作用流是左手流，只有左手流才参加弱相互作用，而右手流则完全不参与

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, e_R, u_R, d_R$$

对左手态可以引入弱同位旋的  $SU(2)_L$  对称性，守恒的量子数是弱同位旋  $\mathbf{T}$ 。而且对左手态和右手态都引入一个  $U(1)_Y$  对称性，守恒的量子数是弱超荷  $Y$ 。它们和电荷  $Q$  之间满足类似于盖尔曼-西岛的关系：

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$$

$U(1)_Y$  对称性的引入实质上是把电荷  $Q$  纳入，将弱相互作用和电磁相互作用统一在共同的规范结构内。

# 3.3 无破缺的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论

狄拉克粒子自由拉氏量中的质量项在  $SU(2)_L$  变换下不是不变的，因为

$$\bar{\Psi}\Psi = (\bar{\Psi}_L + \bar{\Psi}_R)(\Psi_L + \Psi_R) = \bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L$$

因而为了保证理论的  $SU(2)_L$  不变性，现阶段我们取狄拉克费米子的质量为零。

该模型中的规范场对应于  $SU(2)_L$  群的是三重态的  $\mathbf{W}_\mu$ ，对应于  $U(1)_Y$  群的是  $B_\mu$ 。根据前面的讨论，写下定域规范不变的拉氏量为

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - \frac{1}{4}\mathbf{W}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{T} + ig'\frac{Y}{2}B_\mu$$

$$T^i = \frac{1}{2}\tau^i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$W_\mu^k \rightarrow W_\mu'^k = W_\mu^k + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^k(x) + \epsilon^{ijk}\alpha^i(x)W_\mu^j$$

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{W}_\nu - \partial_\nu\mathbf{W}_\mu - g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu$$

# 3.3 无破缺的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论

对于下面的无穷小规范变换拉氏量具有不变性,

$$SU(2)_L$$

$$U(1)_Y$$

$$\Psi_L \rightarrow [1 - ig\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)]\Psi_L,$$

$$\Psi_L \rightarrow [1 - ig'Y\beta(x)/2]\Psi_L$$

$$\Psi_R \rightarrow \Psi_R,$$

$$\Psi_R \rightarrow [1 - ig'Y\beta(x)/2]\Psi_R$$

$$\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}_\mu + \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}(x) + g\boldsymbol{\alpha}(x) \times \mathbf{W}_\mu,$$

$$\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}_\mu$$

$$B_\mu \rightarrow B_\mu,$$

$$B_\mu \rightarrow B_\mu + \partial_\mu \beta(x)$$



# 3.3 无破缺的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论

如果定义同位旋的上升和下降算法为

$$T^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}[T^1 \pm iT^2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau^\pm$$

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

以及

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}[W_\mu^1 \mp iW_\mu^2]$$

则有

$$\mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{T} = W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^- + W_\mu^3 T^3$$

为了把电磁相互作用和弱相互作用统一起来，电磁相互作用项  $ieQA_\mu$  必须包含在协变微分  $D_\mu$  的中性项  $i(gW_\mu^3 T^3 + g'YB_\mu/2)$  中，所以  $B_\mu$  和  $W_\mu^3$  应是  $A_\mu$  和另一个中性场  $Z_\mu$  的线性组合。

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$$

$\theta_w$  称为弱电混合角，或温伯格 (Winberg) 角。

# 3.3 无破缺的SU(2)<sub>L</sub>×U(1)<sub>Y</sub>规范理论

$$igW_\mu^3 T^3 + ig' \frac{Y}{2} B_\mu = iA_\mu (g \sin \theta_w T^3 + g' \cos \theta_w \frac{Y}{2}) \\ + iZ_\mu (g \cos \theta_w T^3 - g' \sin \theta_w \frac{Y}{2})$$

比较等号右方的第一项和电磁相互作用项  $ieQA_\mu = ie(T^3 + Y/2)A_\mu$ ，得到关系式

$$g = \frac{e}{\sin \theta_w}, \quad g' = \frac{e}{\cos \theta_w}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)^2 + \left(\frac{1}{g'}\right)^2 = \left(\frac{1}{e}\right)^2$$

$D_\mu$  中含  $Z_\mu$  的项就是上面式子 等号右方的第二项，可写为

$$D_\mu^Z = ig_z Z_\mu (T^3 - x_w Q)$$

$$g_z = \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} = \sqrt{g^2 + g'^2}, \quad x_w = \sin^2 \theta_w$$

因而协变微分  $D_\mu$  可改写为

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu + ig(T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-) + ig_z (T^3 - x_w Q) Z_\mu$$

# 3.3 无破缺的SU(2)<sub>L</sub>×U(1)<sub>Y</sub>规范理论

规范场和旋量场  $\Psi$  之间的相互作用由  $\mathcal{L}$  中的  $\bar{\Psi}i\gamma^\mu D_\mu\Psi$  项产生，将其明显地写出来为

$$\mathcal{L}_I = -eJ_{\text{em}}^\mu A_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}}(J_L^{+\mu}W_\mu^+ + J_L^{-\mu}W_\mu^-) - g_z J_Z^\mu Z_\mu$$

其中

$$J_L^{\pm\mu} = \sqrt{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu T^\pm\Psi$$

$$J_Z^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu(T^3 - x_w Q)\Psi$$

$$J_{\text{em}}^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu Q\Psi$$

这里我们注意到同位旋算符  $T^i$  作用到  $\Psi_R$  上等于零，而作用到  $\Psi_L$  二重态上时  $T^i = \tau^i/2$ 。进一步的推导可将上面的带电流式 和中性流式 分别写为

$$J_L^{\pm\mu} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\tau^\pm\Psi$$

# 3.3 无破缺的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论

$$J_Z^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \Psi$$

耦合常数  $g_V, g_A$  的定义为

$$g_V = \frac{g_L + g_R}{2} = \frac{1}{2} \tau^3 - 2Q \sin^2 \theta_w, \quad g_A = \frac{g_L - g_R}{2} = \frac{1}{2} \tau^3$$

这就证明了前面所讲的，带电流是矢量流和轴矢量流的对等混合，而中性流中矢量流和轴矢量流的贡献是不对等的。规范场之间的自相互作用如前面所论，由拉氏量中的自由规范场部分给出。

# 3.3 无破缺的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论

通过上面的讨论可以看出这个理论模型引入了光子场  $A$  和  $W^\pm$ 、 $Z$  中间玻色子规范场，描写了它们和物质场之间的相互作用及自相互作用，一切似乎都显得非常完美和漂亮，但是实际上却存在着一个严重的问题，那就是规范粒子  $W^\pm$  和  $Z$  及所有的费米子质量都为零，理论不可重整化。那么如何对理论进行修改，产生这些粒子的质量，而同时又能保证理论的可重整化呢？对称性的自发破缺和希格斯机制将会非常巧妙地解决这一两难的问题。在该机制下，拉氏量的规范对称性仍然得到保持，只不过是有一个特别选取的弱同位旋方向的表观所隐含而已。理论变成可重整化的。

在我们所讨论的非破缺理论中，因为所有规范粒子都没有质量，所以  $A_\mu$  和  $Z_\mu$  作为  $B_\mu$  和  $W_\mu^3$  的线性组合也只是一种形式，没有任何理由选用其中的一对而不用另一对。而在破缺理论中，规范粒子获得了质量后， $A_\mu$  和  $Z_\mu$  就是质量的本征态。但是在很高的能区，当动量转移  $q^2 \gg M_Z^2, M_W^2$  时，费米子和规范粒子的质量都可以忽略，就又回到了非破缺理论的情况。

# 4. 对称性自发破缺

♣ 对称性和守恒定律是粒子物理学的重要研究内容，在物理学的理论和实验研究中起着非常重要的作用。

- (1) 在对相互作用动力学机制缺乏了解的情况下，通过对称性的研究可以获得很多有关相互作用的重要知识。可以根据对称性和相关的守恒定律，对动力学的哈密顿量给出一定的限制。关于QCD理论的早期研究就是一个很好的例子。
- (2) 在有些情况下，虽然已经有了很好的动力学理论，但一些具体问题的计算却非常复杂。利用对称性理论则可能很简洁的算出同样结果。
- (3) 在粒子物理学中，有些对称性是严格的，另外一些对称性是破缺的。

♣ 对称性是人们在观察自然和认识自然过程中所产生的一种观念。在自然界千变万化的运动演化过程中，显现出各式各样的对称性。

♣ 太阳是一个球体，而球体在绕过中心的任意轴旋转某一角度后，其形状和位置都不显现任何可以察觉的变化。这种性质称为绕球心旋转对称性。如果要想确切判断球体是否绕过中心的任意轴转了一个角度，就需要在球上添加某些记号，这些记号的作用就是使球不再具有严格的旋转对称性，亦即在一定程度上破坏了旋转对称性。物理学上称这种情况为对称性的破缺。

# 4. 对称性自发破缺

♣ 根据Noether定理，精确的对称性通常会给出精确的守恒定律。在这种情况下体系的拉氏量和真空（即该理论的基态）在相应的变换下都是不变的。但是，事实上有些守恒定律并非精确守恒：比如同位旋、奇异数等，弱作用的拉氏量在同位旋和奇异数变换下不是不变的。

♣ 另一种情形是系统的拉氏量是不变的，但真空却不是不变的。一个典型的例子是铁磁体。其拉氏量用自旋-自旋相互作用来描述，在三维旋转下是不变的，即当温度高于铁磁体的相变温度 ( $T_c$ ) 时自旋系统是完全杂乱的（顺磁相），因而真空也是  $SO(3)$  不变的（图-8.2(a)）。

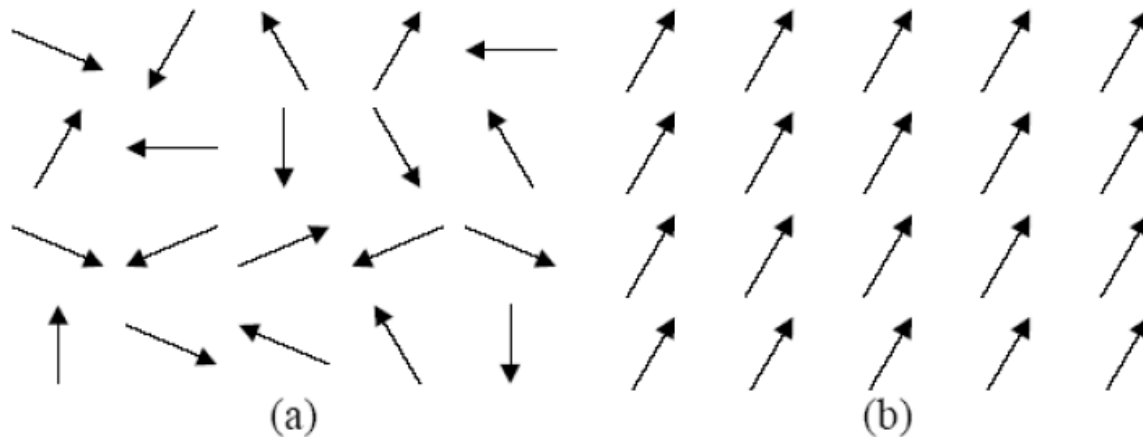


Figure: 8.2 顺磁相(a)和铁磁相(b)的自旋方向示意图。

# 4. 对称性自发破缺

♣ 但是，对于低于 $T_c$ 的温度（铁磁相），就会出现自发磁化强度，使得自旋按照某一特定方向排列（图-8.2(b)）。在这种情形下真空不再具有 $SO(3)$ 群的对称性。对称性破缺为 $SO(2)$ ，体现整个系统绕自旋方向旋转的对称性。

一个理论可以是在连续对称性下精确不变的，而它的基态却不一定必须要具有这种对称性。一个对称性的理论给出非对称性的态是不奇怪的。一个典型的例子是铁磁体，这是一个具有转动不变性的系统，而它的基态却不具备这种对称性。非磁性材料的基态具有明显的旋转对称性，原子自旋的取向是任意的，因而总体上不呈现磁性。但对于铁磁体，由于自旋和自旋的相互作用，它的能量最低态的自旋是排列起来的，从而产生有限的磁性，破缺了它的明显的对称性，因此这时的转动对称性是以一种自发破缺的方式实现的。自发破缺对称性的一个重要特征是，它的基态必须是无穷简并的。对破缺的非对称基态施以对称性变换，可以构造出无穷多的态。由于理论的对称性，所有这些态都和原来的基态具有相同的能量。其哈密顿量 (Hamiltonian) 和所有的转动变换对易。确实，对于所有自旋都沿某一方向排列的铁磁体，我们可以转动磁铁而得到无穷多个基态。



# 4. 对称性自发破缺

♣ 南部阳一郎在1961年将凝聚态理论中起了重要作用的“对称性自发破缺”的概念引入到粒子物理中[113,114]。从前面讨论，我们已经看到，定域规范不变的理论所涉及的规范场是无质量的。这对于电磁作用当然毫无问题，因它的规范场，光子本身是无质量的。但由于弱作用的短程性，传递它的规范粒子必须有较重的质量。

♣ 故为了将弱作用纳入定域规范不变的理论，首先要解决的问题是如何使规范粒子获得质量。如果我们直接引入形式如 $mA^2$ 的质量项，则将明显破坏拉氏量的规范不变性，改变理论的高能行为-其后果是破坏理论么正性，同时理论也是不可重整化的。这个问题的解决依赖于引入对称性自发破缺的思想。

# 4. 对称性自发破缺

## 复标量场-U(1)整体规范变化

♣ 作为一个简单例子,考虑复标量场的 $\phi^4$ 理论,其拉氏量密度为

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2,$$

$\lambda$ 项表示自相互作用。显然 $\mathcal{L}$ 在整体规范变换

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\alpha} \phi,$$

下是不变的( $\alpha$ 与 $x$ 无关)。

该变换是U(1)变化,可以看成是 $\phi$ 在二维复平面上的转动,和O(2)群是等价的

在这种形式下,可以把场量关于位势的极小常数值作掌控。这个极小值表征了系统的基态,如同铁磁铁磁性的基态。 $\phi$ 场围绕其典型值的涨落归于系统的动力学自由度,可以把这个自由度与粒子相关联,代表场的极小结构常数为真空期待值

# 4. 对称性自发破缺

♣ 该体系的势场密度为

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2.$$

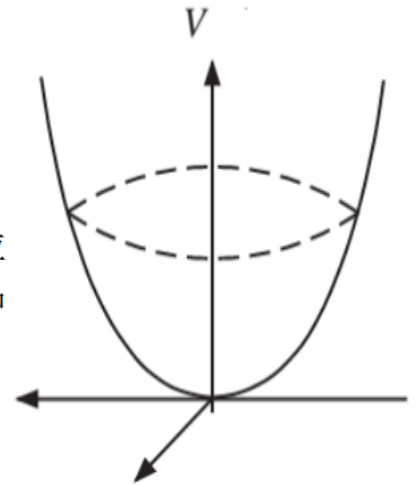
势能的最小值或真空态由下列条件确定：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \mu^2 \phi^* + 2\lambda \phi^{*2} \phi = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \phi^*} &= \mu^2 \phi + 2\lambda \phi^* \phi^2 = 0. \end{aligned}$$

当  $\mu^2 > 0$  时， $\phi^\dagger = \phi = 0$  给出全空间的能量最小值

$\phi_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$ ，真空旋转不变，非简并的，具有严格的对称性

这时  $\mu^2$  项可以被认定为  $\phi$  场的质量项，由  $\phi$  场的实部和虚部所代表的两类场粒子都具有质量  $\mu$ ，因为它们具有复平面上的转动对称性。真空态对称不变。这种对称性实现的理论称为维格纳-外尔 (Wigner-Weyl) 模式。



# 4. 对称性自发破缺

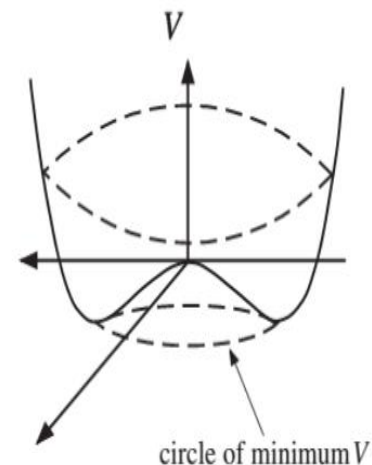
当  $\mu^2 < 0$  时,  $\phi^\dagger = \phi = 0$  给出局部极大值, 而最小值由

$$\phi_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}}, \quad |\phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$$

这些极小值有无穷多个, 处在  $\Re\phi$  和  $\Im\phi$  平面上的一个圆周上, 圆周上的每一点都可看成是真空, 因此一般性地记为

$$\phi_0 = e^{i\theta} \frac{v}{\sqrt{2}}$$

在  $U(1)$  整体规范变换下, 圆周上的一个真空态变为另一个真空态, 真空不再是不变的, 故称模型具有自发破缺的对称性。



♣ 在量子理论中,  $\phi$  成为算符, 上面式对应于不为零的真空期望值:

$$|\langle 0 | \phi | 0 \rangle| = \frac{v}{\sqrt{2}} \neq 0$$

在所有的简并真空态中, 物理真空态只能实现其中的一个, 而物理的量子场是围绕物理真空的激发。设

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) + i\phi_2(x)],$$

选择物理真空为

$$\langle 0 | \phi_1 | 0 \rangle = v, \quad \langle 0 | \phi_2 | 0 \rangle = 0.$$

# 4. 对称性自发破缺

将  $\phi$  场关于真空态展开为

$$\phi = e^{i\frac{\theta(x)}{v}} \frac{v + H(x)}{\sqrt{2}}, \quad \langle 0|H(x)|0 \rangle = 0$$

这里两个场量  $\theta(x)$  和  $H(x)$  等价于  $\phi$  用它的实部和虚部来表示，都是两个实的场量。代入拉氏量式，忽略三阶以上小量得

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H + \frac{1}{2}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta - \frac{\mu^2}{2}(v + H)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + H)^4$$

进一步可化简为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H + \frac{1}{2}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta - \lambda v^2 H^2 + \mathcal{O}(H^3)$$

# 4. 对称性自发破缺

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta - \lambda v^2 H^2 + \mathcal{O}(H^3)$$

由此可见,

$$m_H^2 = 2\lambda v^2 = -2\mu^2, \quad m_\theta = 0$$

理论中引入了一个有质量的标量场粒子 H。另一个标量场粒子  $\theta$  有由偏微分表示的动量项, 但质量为零, 称之为戈德斯通 (Goldstone) 粒子。一般的戈德斯通定理表述为: 整体连续对称性的自发破缺, 必然导致质量为零的标量粒子的存在, 它的数目等于群的生成元的个数。

♣ 不失一般性, 考虑不同的规范对称群, 自旋为0的标量场  $\phi(x)$  在内部空间可能有多个分量, 拉氏量 可以修改为:

$$\mathcal{L}_\phi = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad V(\phi) = \mu^2 \phi^+ \phi + \lambda (\phi^+ \phi)^2.$$

根据前面的讨论, 取  $\mu^2 < 0, \lambda > 0$ 。上式中的势  $V(\phi)$  在习惯上称之为“Higgs势”。类似地, 对称性自发破缺后, 将只有一个Higgs场分量获得质量, Higgs场的其它自由度都会变成戈德斯通粒子。

# 4. 对称性自发破缺

## 非阿贝尔群规范变换:

让我们再来进一步讨论非阿贝尔群的情形。在  $SU(2)$  群下，可将复标量场表示为

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^+ = \phi_1^+ + i\phi_2^+ \\ \phi^0 = \phi_1^0 + i\phi_2^0 \end{pmatrix}$$

它的量子数列表如下： 弱同位旋与弱超核

	$T$	$T_3$	$Y$	$Q$
$\phi^+$	1/2	1/2	1	1
$\phi^0$	1/2	-1/2	1	0

拉氏量写为

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \Phi)^\dagger (\partial_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

对于  $SU(2)$  整体规范变换的不变性是显然的。由于真空是无穷简并的，各个方向的真空等同，因而可以选定一个特殊方向的真空态

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

# 4. 对称性自发破缺

将  $\Phi$  场展开为

$$\Phi = e^{\frac{i\xi(x)\cdot\boldsymbol{\tau}}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

代入得

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{8} \partial^\mu \boldsymbol{\xi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\xi} - \frac{\mu^2}{2} (v + H)^2 - \lambda (v + H)^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{8} \partial^\mu \boldsymbol{\xi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\xi} - \lambda v^2 H^2 + \mathcal{O}(H^3) \end{aligned}$$

因而有

$$m_H^2 = 2\lambda v^2 = -2\mu^2, \quad m_{\xi_i} = 0$$

在一个标量粒子获得质量的同时，对应于  $SU(2)$  群的三个生成元存在三个无质量的戈德斯通玻色子  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )。



# 4. 对称性自发破缺

1. 对称性破缺的程度： 我们考虑一般情况，假设 $\phi(x)$ 在内部空间有 $n$ 个实分量，

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix},$$

那么有

$$\begin{aligned} \phi^\dagger \phi &= \phi_1^2(x) + \phi_2^2(x) + \cdots + \phi_n^2(x), \\ \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 (\phi^\dagger \phi) - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \end{aligned}$$

显然， $\mathcal{L}$ 在 $n$ 维内部空间的转动下是不变的。或者说，它在内部空间具有旋转对称性，即球对称性。实 $n$ 维空间的转动，可以用 $SO(n)$ 群来描述。 $SO(n)$ 群的基础表示是 $n \times n$ ，实正交归一矩阵，它有 $n^2$ 个元素。由于有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个正交条件和 $n$ 个归一化条件的限制，独立的元素只有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个。所以， $SO(n)$ 群有 $N = \frac{1}{2}n(n-1)$ 个群参数和生成元。这些生成元的基本表示可以写成

$$L_{ij} = -i(E_{ij} - E_{ji}), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

$E_{ij}$  是 $n \times n$ 矩阵，它的矩阵元和群元素是

$$\begin{aligned} (E_{ij})_{kl} &= \delta_{ik} \delta_{jl}, \\ U(\theta) &= \exp[-i\theta_{ij} L_{ij}] \end{aligned}$$

# 4. 对称性自发破缺

♣ 在此群的变换下，标量场的变换为

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= U(\theta)\phi(x), \\ \phi'^{\dagger}(x)\phi'(x) &= \phi^{\dagger}(x)\phi(x).\end{aligned}$$

所以，拉氏量 是不变的。

♣ 仿照前面的讨论， $\phi^{\dagger}(x)\phi(x) = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$  可以推知，标量场在

$$\phi^{\dagger}(x)\phi(x) = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$$

时，取能量最低状态。换句话说，其真空态是

$$\phi_0 = \langle 0|\phi(x)|0\rangle_0 = v = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix},$$

$$v^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}.$$

在 $n$ 维内部空间，以 $v = \sqrt{-\mu^2/2\lambda}$ 为半径的球面上，它取真空值。

# 4. 对称性自发破缺

♣ 如果我们以 $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ 为 $n$ 维空间的坐标轴，并把物理真空取在 $\phi_n$ 轴上，即令

$$\phi_0 = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix}.$$

显然，这样的真空在 $SO(n)$ 群的转动下不是不变的。

♣ 为了进一步分析真空破缺的情况，我们把由生成元 $L_{ij}$ 分成两组 $l_{ij}$ 和 $K_i$ ，而

$$\begin{aligned} l_{ij} &= -i(E_{ij} - E_{ji}), & i, j &= 1, 2, \dots, n-1, \\ K_i &= -i(E_{in} - E_{ni}), & i &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

显然，

$$l_{ij} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad K_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \neq 0.$$

从而

$$\exp[-il_{ij}\theta_{ij}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix}, \quad \exp[-i\theta_i K_i] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix}.$$

这表明，由 $(n-1)(n-2)/2$ 个生成元 $l_{ij}$ 生成的变换，仍然保持真空不变。破坏真空对称的只有 $n-1$ 个生成元 $K_i$ 。

# 4. 对称性自发破缺

**2. 对称子群和破缺陪集：** 把上述的真空态 $\phi_0$ 和生成元 $L_{ij}$ 做一个相似变换，那么真空态和生成元的表示形式就将不同，但把保持真空不变的生成元和破坏真空的生成元分开来的性质仍然存在。而且，这种性质还可以推广到一般情况。所以在一般情况下，我们可以用

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix},$$

表示标量场 $\phi(x)$ 的真空态矢量，用

$$L^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N$$

表示规范变换群的生成元。其中有 $M$ 个生成元保持真空不变

$$I^\beta v = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, M.$$

另外 $N - M$ 个生成元破坏真空对称性

$$K^\gamma v \neq 0, \quad \gamma = 1, 2, \dots, N - M.$$

可以证明：保持真空不变的生成元构成子群，破坏真空不变的生成元构成相应的陪集。可知，

$$[I^\alpha, I^\beta] v = I^\alpha I^\beta v - I^\beta I^\alpha v = 0.$$

另一方面，从生成元的对易关系得

# 4. 对称性自发破缺

$$[I^\alpha, I^\beta] v = if^{\alpha\beta\gamma} L^\gamma v = 0$$

这表明, 当  $f^{\alpha\beta\gamma} \neq 0$  时,  $L^\gamma v = 0$ , 即  $L^\gamma = I^\gamma$ ,

$$[I^\alpha, I^\beta] = if^{\alpha\beta\gamma} I^\gamma.$$

这就是说,  $I^\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, M)$  生成的群元素构成子群-对称子群(保持标量场  $\phi(x)$  对称性的子群)。而  $K^\beta (\beta = 1, 2, \dots, N - M)$  生成的群元素构成相应的陪集, 我们把它叫做破缺陪集。有时, 我们也把  $I^\alpha$  叫做对称生成元, 把  $K^\beta$  叫做破缺生成元。

# 4. 对称性自发破缺

3.  $K^\beta v$ 的性质:  $v$ 是真空态矢量,  $K^\beta v$ 是 $N - M$ 个新的态矢量。它和 $v$ 正交, 而且自身之间又相互独立。下面还将证明, 它是质量算符的本征值为0的态矢量。如前面所述,  $K^\beta$ 的矩阵元是纯虚, 反对称的。所以有

$$\langle v | K^\beta v \rangle = v_i K_{ij}^\beta v_j = \frac{1}{2} v_i v_j (K_{ij}^\beta + K_{ji}^\beta) = 0$$

即 $K^\beta v$ 与 $v$ 正交。令

$$A_{\alpha\beta} = \langle K^\alpha v | K^\beta v \rangle = \langle v | K^\alpha K^\beta v \rangle$$

由于 $v$ 是实矢量,  $K^\alpha$ 是厄密矩阵, 故 $A_{\alpha\beta}$ 是一个实对称矩阵的矩阵元。

♣ 矩阵代数告诉我们, 实对称矩阵总是可以对角化的, 总可以找到一个正交矩阵 $O$ 使得

$$\begin{aligned} K^\alpha v &\rightarrow OK^\alpha v, \\ \tilde{A}_{\alpha\beta} &= \langle OK^\alpha v | OK^\alpha v \rangle = A_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

这表明,  $N - M$ 个矢量 $OK^\alpha v$ 是相互正交的。因此, 与它们由一正交变换关系联系的 $N - M$ 个矢量 $K^\alpha v$ 就是线性独立的。

# 4. 对称性自发破缺

**4. 戈德斯通定理：** 我们可以把戈德斯通定理表述为[113,115]：“如果体系的拉氏量在某一个连续对称群 $G$ 下是不变的，但体系的真空仅仅在一个属于 $G$ 的子群 $H$ 下是不变的，那么将存在数目等于破缺生成元个数的零质量的标量粒子。

更直接的讲就是：如果规范对称群 $G$ 的 $N$ 个生成元中有 $M$ 个破缺生成元和 $N - M$ 个保持真空不变的对称生成元，那么和 $M$ 个破缺生成元相对应，存在着 $M$ 个零质量的标量粒子。

♣ 现在证明该定理。标量场 $\phi(x)$ 的拉氏量  $\mathcal{L}$ 。在无穷小规范变换下

$$U(\theta) = \exp(-i\theta^\alpha L^\alpha) \simeq 1 - i\theta^\alpha L^\alpha,$$

$$\delta\phi_i = -i\theta^\alpha L_{ij}^\alpha \phi_j.$$

$\mathcal{L}$ 是不变的， $V(\phi)$ 也是不变的，即

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial\phi_i} \delta\phi_i = -i\theta^\alpha \frac{\partial V}{\partial\phi_i} L_{ij}^\alpha \phi_j = 0.$$

# 4. 对称性自发破缺

♣ 由于 $\theta^\alpha$ 是任意的, 所以有

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} L_{ij}^\alpha \phi_j = 0.$$

将上式对 $\phi_k$ 微分可得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} L_{ij}^\alpha \phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} L_{ik}^\alpha = 0.$$

将上式中的诸值取真空值, 即令

$$\phi_i = v_i, \quad \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \Big|_{\phi=v} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} \Big|_{\phi=v} = M_{ki}^2 > 0$$

就得到

$$M_{ki}^2 L_{ij}^\alpha v_j = 0,$$

其矩阵形式为

$$M^2 L^\alpha v = 0.$$



# 4. 对称性自发破缺

♣ 如前所述,在 $N$ 个生成元 $L^\alpha$ 中,有 $M$ 个对称子群的生成元 $I^\beta$ ,有 $N - M$ 个破缺子群的生成元 $K^\gamma$ 。因此,在(8.116)式中的 $N$ 个方程中,就有

$$\begin{aligned} M^2 I^\beta v &= 0, & I^\beta v &= 0, & \beta &= 1, 2, \dots, M; \\ M^2 K^\gamma v &= 0, & K^\gamma v &\neq 0, & \gamma &= 1, 2, \dots, N - M. \end{aligned}$$

(8.117)式表示的 $M$ 个方程没有什么新的物理意义。(8.118)式就是戈德斯通定理的数学表达式。

♣ 由定义矩阵 $M^2$ 的(8.114)式可知, $M_{ij}^2$ 就是Higgs势 $V(\phi)$ 中二次项 $\phi_i \phi_j$ 的系数,是 $\phi$ 场的质量平方算符的矩阵元,即 $M^2$ 是 $\phi$ 场的质量平方算符。

(8.118)式表明,态矢量 $K^\gamma v$ 是算符 $M^2$ 的本征矢量,对应的本征值为0.由于态矢量 $K^\gamma v$ 是线性独立的,所以质量矩阵 $M^2$ 有 $N - M$ 个零质量本征值。总而言之,与每一个破缺生成元对应,存在一个零质量的Goldstone标量粒子。

# 4. 对称性自发破缺

**5. 参数化:** 既然  $K^\gamma v$  ( $\gamma = 1, 2, \dots, N - M$ ) 是与  $v$  正交的线性独立的矢量, 而  $\phi$  场又有  $n$  个独立的分量, 那么  $v$  就是有  $n - (N - M)$  个独立分量的矢量。我们令  $\eta(x)$  是与  $v$  平行的矢量, 那么  $K^\alpha v, K^\alpha \eta$  就是与  $v, \eta$  正交的矢量, 它们是线性独立的, 而且可以按照(8.109)式正交化。

♣ 为了下面讨论的方便, 假设它们是正交化了的, 即令

$$\langle K^\alpha v | K^\beta v \rangle = A^\alpha \delta_{\alpha\beta}$$

我们再令  $\xi^\alpha(x)$  是沿  $K^\alpha v$  方向的场分量, 那么就可以用  $\eta(x), \xi^\alpha(x)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N - M$ ) 来取代场量  $\phi(x)$  中的  $n$  个独立的分量, 并写成

$$\phi(x) = \exp \left[ \frac{i \xi^\alpha(x) K^\alpha}{|v|} \right] (v + \eta(x)).$$

场量的这种表现形式叫做参数化(parameterization)。

# 4. 对称性自发破缺



$$\begin{aligned}\phi^\dagger &= (v^+ + \eta^+(x)) \exp \left[ \frac{-i\xi^\alpha(x) K^\alpha}{|v|} \right], \\ \phi^\dagger \phi &= (v^+ + \eta^+(x)) (v + \eta(x)) \\ &= v^+ v + \eta^+(x) \eta(x) + v^+ \eta(x) + \eta^+(x) v, \\ \partial^\mu \phi &= \exp \left[ \frac{i\xi^\alpha(x) K^\alpha}{|v|} \right] (i\partial^\mu \xi^\alpha(x)) \frac{K^\alpha}{|v|} (v + \eta(x)) \\ &\quad + \exp \left[ \frac{i\xi^\alpha(x) K^\alpha}{|v|} \right] \cdot \partial^\mu \eta(x), \\ \partial_\mu \phi^\dagger &= (v^+ + \eta^+(x)) \left( -i\partial_\mu \xi^\alpha(x) \frac{K^\alpha}{|v|} \right) \exp \left[ -\frac{i\xi^\alpha(x) K^\alpha}{|v|} \right] \\ &\quad + \partial_\mu \eta^+(x) \exp \left[ -\frac{i\xi^\alpha(x) K^\alpha}{|v|} \right], \\ \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi &= \partial_\mu \eta^+(x) \partial^\mu \eta(x) + \partial_\mu \xi^\alpha(x) \partial^\mu \xi^\alpha(x) \\ &\quad + \partial_\mu \eta^+(x) i\partial^\mu \xi^\alpha(x) \frac{K^\alpha}{|v|} (v + \eta(x)) \\ &\quad - i(v^+ + \eta^+(x)) \partial_\mu \xi^\alpha(x) \frac{K^\alpha}{|v|} \partial^\mu \eta(x).\end{aligned}$$

# 4. 对称性自发破缺

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[ \partial_\mu \eta^+(x) \partial^\mu \eta(x) + \partial_\mu \xi^\alpha(x) \partial^\mu \xi^\alpha(x) + \frac{i}{|v|} \partial_\mu \eta^+(x) \partial^\mu \xi^\alpha(x) K^\alpha (v + \eta(x)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{|v|} (v^+ + \eta^+(x)) \partial_\mu \xi^\alpha(x) K^\alpha \partial^\mu \eta(x) \right] \\ &\quad - \mu^2 \left[ v^2 + v^+ \eta(x) + \eta^+(x) v + \eta^+(x) \eta(x) \right] \\ &\quad - \lambda \left[ v^2 + v^+ \eta(x) + \eta^+(x) v + \eta^+(x) \eta(x) \right]^2 \\ &= \partial_\mu \eta^+(x) \partial^\mu \eta(x) + \partial_\mu \xi^\alpha(x) \partial^\mu \xi^\alpha(x) + 2\mu^2 \eta^+(x) \eta(x) + \dots\end{aligned}$$

这就是参数化以后，用新场 $\eta(x), \xi^\alpha(x)$ 表示的拉氏量。显然，它在规范群变换下不再具有不变性。

♣ 由前面式可知，由于 $\phi(x)$ 场的真空值是 $v$ ，新场 $\eta(x), \xi^\alpha(x)$ 的真空值就是零。因此，在规范群变换下真空是不变的。也就是说，用上式描述的Higgs场，在规范变换下真空是对称的，拉氏量是破缺的。

♣ 而且， $\eta(x)$ 场的质量为 $\sqrt{-4\mu^2}$ 是实的， $\xi^\alpha(x)$ 场的质量为零。 $\xi^\alpha(x)$ 场的数目与破缺生成元的个数相同，就是质量为0的标量场(Goldstone粒子)的数目与破缺生成元的个数相等。这正是Goldstone定理的具体体现。

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 到1964年，在规范群框架下对电磁相互作用和弱作用的研究取得一系列重要进展，人们相信必须用规范群 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 来统一描写电磁相互作用和弱作用。

♣ 由于规范不变性和可重整性的要求，不能向规范场的拉氏量中直接放进规范玻色子的质量项，与 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范群相关的4个规范粒子无法获得质量，因而是零质量的。尽管传递电磁相互作用的光子没有质量，但弱作用是短距离相互作用，传递弱作用的 $W^\pm$ 和 $Z^0$ 玻色子肯定具有很重的质量。

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 对称性的自发破缺可以使规范粒子获得质量，但是Goldstone定理告诉我们：发生对称性自发破缺后。和每一个破缺生成元相对应的就必有一个零质量的Goldstone粒子。然而，我们在实验上没有发现这样的粒子。没有质量的规范玻色子和没有质量的Goldstone粒子，是人们所不喜欢的，希望从理论中除去。

♣ 1964年8月31日，比利时自由大学的弗朗索瓦·恩格勒和罗伯特·布劳特的论文（1964年6月26日投稿）发表[101]。同年9月15日和10月19日，英国爱丁堡大学的彼得·希格斯的两篇论文（1964年7月27日和8月31日投稿）分别发表[102]。这三位学者在他们的论文中分别独立提出了一种通过规范对称性自发破缺而使规范粒子获得质量的机制，把规范场和标量场（亦即Higgs场）放到一起考虑。他们证明：对称性破缺产生的零质量的Goldstone粒子可以被规范粒子吃掉，变成其纵向分量，使规范粒子获得质量。一次解决两个难题，这就是Higgs机制。

♣ 2012年7月4日，在LHC超高能强子对撞机上工作的ATLAS和CMS实验组宣布发现了希格斯玻色子，一个与“Higgs机制”息息相关的的基本粒子。2013年10月，F.Englert和P.Higgs由于提出“Higgs机制”而获得2013年诺贝尔物理奖，R.Brout教授（F.Englert的博士后合作导师）则由于已经在2011年5月逝世而失此殊荣。

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 众所周知，我们习惯上把“通过规范对称性自发破缺而使规范粒子获得质量的机制”称之为“Higgs机制”，一直到欧洲核子研究中心在2012年9月把该机制正式命名为“布劳特-恩格勒-希格斯机制”(BEH Mechanism)。

♣ 1967年10月，温伯格在他的那篇著名论文“A model of leptons” [105]中，借助“希格斯”机制成功地建立了与实验事实相符的电弱统一理论。温伯格在这篇论文的引文[3]中引用了Higgs(3篇论文)，Englert- Brout[101] 还有Guralnik- Hagen- Kibble [103] 三组共5篇文章，但他却不经意地把希格斯的3篇论文排在了其他人的前面。由于参考文献一般只能显示每篇引文的期刊名称、年份、卷号和页码，因此读者如果不去查原文的话，根本无法判断希格斯的第一篇论文[102]实际上比Englert-Brout的论文[101]要晚1个月。

♣ 最喜剧性的“错误”发生在1971年，温伯格在另一篇相关论文[116]中把P. Higgs 的第一篇论文“Phys. Lett. 12 (1964) 132”的论文误引为“Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 132”。在这之后的绝大多数研究人员就把希格斯的《物理快报》论文当作“希格斯”机制的开山之作。温伯格本人直到2012年5月才意识到这个错误，并就此在《纽约书评》杂志上做了公开纠正。

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 作为一个简单示范，我们利用比较简单的U(1)规范场来演示BEH机制，包含了标量场的规范相互作用拉氏量为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - V(\phi),$$

其中协变导数 $D_\mu$ ，规范场的场强张量 $F_{\mu\nu}$ 定义为

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - ieA_\mu(x), \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned}$$

♣  
做

取合适的Higgs标量场 $\phi(x)$ ，并  
参数化，对标量场 $\phi(x)$ 做定域规范变换，

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) + i\phi_2(x)]$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) = (v + h(x))e^{i\frac{\theta(x)}{v}}.$$

$$V = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$$

同时为了保持拉氏量 $\mathcal{L}$ 的规范不变性而对规范场 $A_\mu(x)$ 做相应的规范变换：

$$\phi(x) \rightarrow e^{-i\theta(x)/v}\phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{ev}\partial_\mu\theta(x).$$



# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 把以上各个定义式带入拉氏量  $\mathcal{L}$ ，可得：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \lambda^2 v^2 h^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4 \\ + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + v e^2 A_\mu A^\mu h + \frac{1}{2} e^2 A_\mu A^\mu h^2.$$

♣ 从上式可以读出：

1. 上式中第一行的第2项给出标量场(Higgs场) $h(x)$ 的质量项： $m_h^2 = \lambda^2 v^2 / 2$ ；第3和第4两项给出Higgs场的3点和4点自耦合相互作用项。而且非常重要的一项是Higgs粒子的质量项与其自耦合相互作用成正比，比例常数是真空期望值。
2. 在Higgs的质量被测定为125GeV之后，进一步测量Higgs的自耦合相互作用就变得非常重要。这种超出原来已知的四种相互作用之外的相互作用是不是只与Higgs的质量有关，是验证对称性自发破缺的关键。
3. 第二行的第1项给出规范场 $A_\mu(x)$ 的质量项： $m_A^2 = e^2 v^2$ 。第二行的第3项和第4项分别给出3点和4点规范场-Higgs场耦合项。

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 我们下面证明在电弱统一理论中如何通过“Higgs机制”使 $W, Z$ 规范玻色子获得质量，并保持光子 $\gamma$ 零质量。为了实现 $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ 的规范对称性破缺，需要引入一个

复Higgs场二重态：

具有和费米子场相同地 $SU(2)_L$ 规范变化

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi \rightarrow \Phi' = e^{-iT \cdot \alpha(x)} \Phi$$

电弱统一理论的拉氏量可以写为三部分 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y$ ，其中的规范场部分，Higgs场部分和Yukawa耦合部分分别为[16]：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B_{\mu\nu} + i\bar{Q}_L \gamma^\mu D_\mu Q_L \\ &\quad + i\bar{U}_R \gamma^\mu D_\mu U_R + i\bar{D}_R \gamma^\mu D_\mu D_R + i\bar{L}_L \gamma^\mu D_\mu L_L + i\bar{E}_R \gamma^\mu D_\mu E_R \\ \mathcal{L}_H &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \\ \mathcal{L}_Y &= y_U \bar{Q}_L U_R \tilde{\Phi} + y_D \bar{Q}_L D_R \Phi + y_L \bar{L}_L E_R \Phi + h.c., \end{aligned}$$

其中各个规范场的场强张量，以及费米场的协变导数项为：

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \end{aligned}$$

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

$$D_\mu Q_L = \left( \partial_\mu - i\frac{g}{2}\tau^i W_\mu^i - i\frac{g'}{6}B_\mu \right) Q_L,$$

$$D_\mu U_R = \left( \partial_\mu - i\frac{2g'}{3}B_\mu \right) U_R,$$

$$D_\mu D_R = \left( \partial_\mu + i\frac{g'}{3}B_\mu \right) D_R,$$

$$D_\mu L_L = \left( \partial_\mu - i\frac{g}{2}\tau^i W_\mu^i + i\frac{g'}{2}B_\mu \right) L_L,$$

$$D_\mu E_R = \left( \partial_\mu + ig'B_\mu \right) E_R.$$

在上述表达式中， $y_{q,l}$ 是Yukawa 耦合常数， $\mu^2 < 0$ ， $\lambda > 0$  是Higgs 势 $V(\Phi)$  的参数。SU(2) 变换的不变性的一个体现是拉氏量中的 $2 \times 2$ 矩阵乘积最后都乘成标量，它们都是两个二重态相乘或者两个单态相乘。

♣ Higgs场的协变导数在矩阵分量形式表示为：

$$(D_\mu \Phi) = \begin{pmatrix} \partial_\mu - i\frac{g}{2}W_\mu^3 - i\frac{g'}{2}B_\mu & -i\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^1 \\ -i\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^2 & \partial_\mu + i\frac{g}{2}W_\mu^3 - i\frac{g'}{2}B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 为了在自发破缺过程中保持  $U(1)_{em}$  的不变性，把 Higgs 标量场  $\Phi(x)$  的真空期望值选择在中性分量上：

$$\langle \Phi \rangle_0 = \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Higgs 标量场  $\Phi(x)$  有 4 个独立分量，做如下形式的参数化：

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \theta_2(x) + i\theta_1(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x)) + i\theta_3 \end{pmatrix} = U(\vec{\theta})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x)) \end{pmatrix},$$

其中  $U(\vec{\theta}) = \exp [i\theta_i(x)\tau^i/v]$ 。

♣ 对 Higgs 场做规范变换（在么正规范下拉氏量中只出现物理场）：

$$\begin{aligned} \Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) &= U(\vec{\theta})^{-1} \Phi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} = \frac{v + H(x)}{\sqrt{2}} \chi, \quad \text{with } \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

选定一个特别的基态-真空期望值  $\langle 0 | \Phi | 0 \rangle$ ， $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范对称性就自发破缺到  $U(1)_{em}$ 。其它相关费米场和规范场的相应规范变换为：

$$\begin{aligned} Q'_L &= U(\theta) Q_L, & U'_R &= U_R, & D'_R &= D_R, \\ L'_L &= U(\theta) L_L, & E'_R &= E_R, & B'_\mu &= B_\mu, \\ \frac{\tau \cdot \mathbf{W}'_\mu}{2} &= U(\theta) \left( \frac{\tau \cdot \mathbf{W}_\mu}{2} \right) U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta)] U^{-1}(\theta). \end{aligned}$$

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 考虑

拉氏量  $\mathcal{L}_H$ 。在做参数化和规范变换以后有：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H &= (D_\mu \Phi')^\dagger (D^\mu \Phi') - \mu^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4, \\ D_\mu \Phi' &= \left( \partial_\mu - i \frac{g}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}'_\mu - i \frac{g'}{2} B'_\mu \right) \frac{v + H(x)}{\sqrt{2}} \chi.\end{aligned}$$

，我们也得到了 Higgs 场的质量正比于其自耦合作用。

♣ 由  $\mathcal{L}_H$  的第一项可以导出矢量玻色子  $W^\pm$  和  $Z^0$  的质量项：

$$\begin{aligned}(D_\mu \Phi')^\dagger (D^\mu \Phi') &= \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 + \frac{g^2}{8} (v + H)^2 |W_\mu^1 + iW_\mu^2|^2 + \frac{1}{8} (v + H)^2 |gW_\mu^3 - g'B_\mu|^2 \\ &= \frac{g^2 v^2}{4} \cdot \frac{1}{2} |W_\mu^1 + iW_\mu^2|^2 + \frac{1}{2} \frac{v^2 (g^2 + g'^2)}{4} \left| \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right|^2 + \dots \\ &= M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2} M_A^2 A_\mu A^\mu + \dots.\end{aligned}$$

其中  $(W^\pm, Z_\mu)$  和电磁场  $A_\mu$  是经过重新定义的弱作用规范场和电磁场，前者获得重质量  $M_W$  和  $M_Z$ ，后者继续保持零质量(取  $M_A = 0$ )。

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 由上式可以看出：

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad Z_\mu = \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad A_\mu = \frac{gW_\mu^3 + g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$
$$M_W = \frac{gv}{2}, \quad M_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}, \quad M_A = 0.$$

实际上 $Z_\mu$ 和 $A_\mu$ 是相互正交的质量本征态，可以定义成 $(W_\mu^3, B_\mu)$ 的混合

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix},$$

其中的混合角 $\theta_W$ 就是温伯格角： $\tan(\theta_W) = g'/g$ 。而且很容易推导出：

$$\cos \theta_W = M_W/M_Z.$$

♣ 由下式可以更清楚地看出 $M_Z$ 和 $M_A$ 是怎样推导出来的。

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{8} |gW_\mu^3 - g'B_\mu|^2 &= \frac{v^2}{8} (W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (Z_\mu, A_\mu) \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

在这里，我们使用么正变换 $U(\theta_W)$ 对质量矩阵做了对角化。

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

希格斯粒子的三次方和四次方项给出了它的自相互作用。希格斯粒子不和光子场  $A_\mu$  耦合，因此它是不参加电磁相互作用的，它只和中间玻色子有三次方和四次方的相互作用，

$$\left( \frac{1}{4} g^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{8} g_z^2 Z^\mu Z_\mu \right) (H^2 + 2vH).$$

希格斯机制的物理意义在于它告诉我们，空间各点的真空都可以发射或吸收一个携带弱同位旋和弱超荷的希格斯场量子，使得与之耦合的中间玻色子和费米子获得质量。光子和胶子场不和它耦合，因而仍然是没有质量的。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= (D_\mu \Phi')^\dagger (D^\mu \Phi') - \mu^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4, \\ D_\mu \Phi' &= \left( \partial_\mu - i \frac{g}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}'_\mu - i \frac{g'}{2} B'_\mu \right) \frac{v + H(x)}{\sqrt{2}} \chi. \end{aligned}$$

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

## 四费米子模型

规范场和旋量场  $\Psi$  之间的相互作用由  $\mathcal{L}$  中的  $\bar{\Psi}i\gamma^\mu D_\mu\Psi$  项产生, 将其明显地写出来为,

$$\mathcal{L}_I = -eJ_{em}^\mu A_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}}(J_L^{+\mu}W_\mu^+ + J_L^{-\mu}W_\mu^-) - g_z J_Z^\mu Z_\mu,$$

其中,

$$J_L^{\pm\mu} = \sqrt{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu T^\pm\Psi,$$

$$J_Z^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu(T^3 - x_w Q)\Psi,$$

$$J_{em}^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu Q\Psi.$$



# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

规范模型和真空自发破缺机制的结合把质量不为零的W/Z玻色子和电磁相互作用结合起来  
在该模型中有效的四费米子相互作用形式可以写为，

$$-\mathcal{L}_{eff} = \frac{-\frac{1}{2}e^2(J_{em}^\mu)^2}{q^2} - \frac{\frac{1}{2}g^2 J_L^{+\mu} J_{L\mu}^-}{q^2 - M_W^2} - \frac{\frac{1}{2}g_z^2(J_Z^\mu)^2}{q^2 - M_Z^2},$$

$q^2$  是四动量转移。电磁流和中性弱流前面的因子 1/2 是因为这时费米子流的两种排序方式都有贡献，而带电弱流前面的因子 1/2 则是来自拉氏量中的因子  $g/\sqrt{2}$ 。在低能下，即  $q^2$  比  $M_W^2$ ，或  $M_Z^2$  小得多时，上式第二项就演变为  $V - A$  带电流的相互作用形式，  
可得费米耦合常数  $G_F$  和  $g$ 、 $M_W$  之间的关系，

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}.$$

上式的第二和第三项可以定义一个参数  $\rho$ ，

$$\rho \equiv \frac{G_{NC}}{G_{CC}} = \left( \frac{g_Z^2}{M_Z^2} \right) / \left( \frac{g^2}{M_W^2} \right),$$

描写中性流和带电流的强度比。在标准模型中  $\rho = 1$ 。

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 既然对称性自发破缺之后只有Higgs场的真空期待值不为零，其它场的真空期待值仍为零，因此凡是有Higgs场参与的相互作用和过程，都将反映出对称性自发破缺所带来的影响和变化。费米子和Higgs粒子之间也有相互作用，称为汤川(Yukawa)耦合。在最小电弱统一理论中，如果只有一代费米子，则有3个独立的耦合常数 $y_e, y_u, y_d$ ，分别给费米子 $e, u, d$ 以质量。

♣ 在电弱统一理论中，凡是左旋费米子都属于弱同位旋2重态，凡是右旋费米子都是弱同位旋单态。在弱作用拉氏量中费米子的质量项表现为左旋场量和右旋场量相乘的项。但在电弱统一理论中，这样的项只能是弱同位旋2重态，不能符合 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 不变性的要求，从而不能存在，这就决定了所有费米子都是无质量的粒子（对称性破缺之前）。

♣ 由于Higgs粒子是 $(I, Y) = (1/2, 1)$ 的粒子，它和左旋费米子： $(I, Y) = (1/2, -1)$ 的轻子和 $(I, Y) = (1/2, 1/3)$ 的夸克，以及右旋费米子： $(I, Y) = (1, -2)$ 的轻子和 $(I, Y) = (0, 4/3)$ 的夸克，一起可以构成 $(I, Y) = (0, 0)$ 的项。这样的项代表了Higgs场和费米子的相互作用，即Yukawa耦合。

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

♣ 以第一代费米子为例，相关的拉氏量  $\mathcal{L}_Y$  可得：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_Y &= y_e \bar{L}_L \Phi e_R + y_u \bar{Q}_L \tilde{\Phi} u_R + y_d \bar{Q}_L \Phi d_R + h.c. \quad \text{满足 } SU(2)_L \times U(1)_Y \text{ 规范不变和可重整化的要求,} \\
 &= \frac{y_e}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_e, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} e_R + \frac{y_u}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix} u_R \\
 &\quad + \frac{y_d}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} d_R + h.c. \\
 &= \frac{y_e v}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R + \frac{y_u v}{\sqrt{2}} \bar{u}_L u_R + \frac{y_d v}{\sqrt{2}} \bar{d}_L d_R + \dots, \quad \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, e_R, u_R, d_R \\
 &= \frac{y_e v}{\sqrt{2}} \bar{e} e + \frac{y_u v}{\sqrt{2}} \bar{u} u + \frac{y_d v}{\sqrt{2}} \bar{d} d + \dots.
 \end{aligned}$$

标准模型中不存在右手  
中微子，中微子没有质  
量，混合没有意义！

♣ 由上式可以读出第一代费米子的质量为：

$$m_e = \frac{y_e v}{\sqrt{2}}, \quad m_u = \frac{y_u v}{\sqrt{2}}, \quad m_d = \frac{y_d v}{\sqrt{2}}.$$

这样，所有的夸克和带电轻子就都获得了质量，其质量大小正比于它们跟 Higgs 的 Yukawa 耦合强度。对于中微子有质量的情况，我们只需要在拉氏量中再加上一项：

$$y_\nu \bar{L}_L \tilde{\Phi} \nu_R$$

就可以使得中微子获得质量  $m_\nu = \frac{y_\nu v}{\sqrt{2}}$ 。当然这是狄拉克质量。

# 5. Brout-Englert-Higgs 机制

质量项:  $\frac{y_e V}{\sqrt{2}} \bar{e}e + \frac{y_u V}{\sqrt{2}} \bar{u}u + \frac{y_d V}{\sqrt{2}} \bar{d}d + \dots$   $m_e = \frac{y_e V}{\sqrt{2}} \rightarrow G_e = y_e = \frac{\sqrt{2} m_e}{v} = 2.9 \times 10^{-6}$

物质场与 H 场耦合  $\frac{y_e H}{\sqrt{2}} \bar{e}e + \frac{y_u H}{\sqrt{2}} \bar{u}u + \frac{y_d H}{\sqrt{2}} \bar{d}d$   $\frac{y_e H}{\sqrt{2}} \bar{e}e = \frac{m_e}{v} H \bar{e}e = \sqrt[4]{2} \sqrt{G_F} m_e H \bar{e}e$

三代轻子  $\sqrt[4]{2} \sqrt{G_F} (m_e H \bar{e}e + m_\mu H \bar{\mu}\mu + m_\tau H \bar{\tau}\tau)$

物质场与 H 场耦合与质量成正比。。

Higgs 机制产生轻子质量时引入了三个任意的耦合参数，没有从根本上解释质量的来源

# 6. $\sigma(e^+e^- \rightarrow f^+f^-)$ 的计算

♣ 在本节，作为一个例子，我们选择正负电子对撞机实验的一个简单过程： $e^+e^- \rightarrow f^+f^-$ ，在最低阶(树图)计算该过程的散射截面 $\sigma(e^+e^- \rightarrow f^+f^-)$ 。

## § 6.1 $e^+e^- \rightarrow f^+f^-$ : 有极化情况

♣ 首先考虑一般情况: (a)末态轻子可以是轻子，也可以是夸克; (b)考虑初末态轻子的极化，并取近似： $m_l = m_f = 0$ 。这样，当末态轻子是电子对或者电子中微子对时，如图-8.4所示的“S-道”和“t-道”均有贡献。当末态轻子是其它轻子对或者夸克对时，只有“S-道”有贡献。

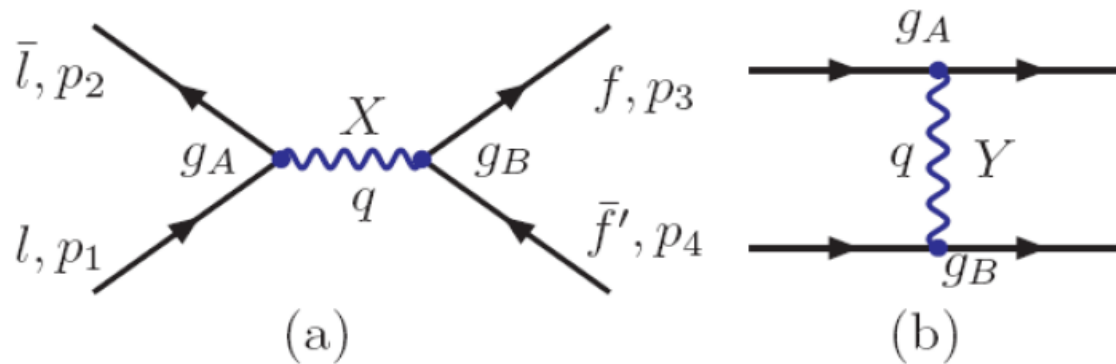


Figure: 8.4  $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$  散射过程的“S-道”和“t-道”树图贡献。

# 6.1 $\sigma(e^+e^- \rightarrow f^+f^-)$ : 有极化情况

♣ 首先考虑S-道贡献，其散射振幅可以写为[21]:

$$\mathcal{M}_{AB}^{(s)} = G_{AB}^{(s)} [\bar{u}_B(p_3)\gamma^\alpha v_B(p_4)] [\bar{v}_A(p_2)\gamma_\alpha u_A(p_1)],$$

其中A, B表示初末态轻子的手征性:  $(A, B) = (L, R)$ ;  $G_{AB}$ 表示初末态顶点处的耦合 $g_i$ 与传播子的乘积:

$$G_{AB}^{(s)} = \sum_X \frac{g_A(X \rightarrow e^- e^+) g_B(X \rightarrow f\bar{f})}{s - M_X^2 + iM_X\Gamma_X}$$

其中的求和是对可能有贡献的规范玻色子求和:  $X = (\gamma, Z^0, W^\pm)$ 。对t-道贡献，其振幅可以写为:

$$\mathcal{M}_{AB}^{(t)} = G_{AB}^{(t)} [\bar{v}_B(p_2)\gamma^\alpha v_B(p_4)] [\bar{u}_A(p_3)\gamma_\alpha u_A(p_1)]$$

其中

$$G_{AB}^{(t)} = \sum_Y \frac{g_A(Y \rightarrow e^+ f) g_B(Y \rightarrow e^- \bar{f})}{t - M_Y^2 + iM_Y\Gamma_Y}$$

其中可能有贡献的规范玻色子为 $Y = (\gamma, Z^0, W^\pm)$ 。

♣ 这里关于手征性的约定是: (a)  $G_{AB}$ 的下角标 $A = (L, R)$ 表示初态电子的手征性,  $B = (L, R)$ 表示末态轻子 $f$ 的手征性; (b) 与 $g_L$ 顶点耦合的费米子 $(e^-, f)$ 的手征性是左手的L, 耦合的反费米子 $(e^+, \bar{f})$ 则是右手的R。

# 6.1 $\sigma(e^+e^- \rightarrow f^+f^-)$ : 有极化情况

♣ 考虑  $A = B = L$  的情况。使用 Fierz 变换可得

$$[\bar{v}_L(p_2)\gamma^\alpha v_L(p_4)] [\bar{u}_L(p_3)\gamma_\alpha u_L(p_1)] = [\bar{u}_L(p_3)\gamma^\alpha v_L(p_4)] [\bar{v}_L(p_2)\gamma_\alpha u_L(p_1)].$$

所以可以把  $s$ -道和  $t$ -道贡献加到一起, 得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\bar{e}_L e_L \rightarrow f_L \bar{f}_L) &= \mathcal{M}_{LL}^{(s)} + \mathcal{M}_{LL}^{(t)} \\ &= [G_{LL}^{(s)} + G_{LL}^{(t)}] [\bar{u}_L(p_3)\gamma^\alpha v_L(p_4)] [\bar{v}_L(p_2)\gamma_\alpha u_L(p_1)]. \end{aligned}$$

♣ 现在计算振幅的模方

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(\bar{e}_L e_L \rightarrow f_L \bar{f}_L)|^2 &= 16(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) |G_{LL}(s) + G_{LL}(t)|^2 \\ &= 4u^2 |G_{LL}(s) + G_{LL}(t)|^2. \end{aligned}$$

其中  $u = (p_1 - p_4)^2$ 。

♣ 同理, 对  $A = B = R$  情况, 我们得到

$$|\mathcal{M}(\bar{e}_R e_R \rightarrow f_R \bar{f}_R)|^2 = 4u^2 |G_{RR}(s) + G_{RR}(t)|^2.$$

# 6.1 $\sigma(e^+e^- \rightarrow f^+f^-)$ : 有极化情况

♣ 对其它可能的手征组合情况, 则有

$$|\mathcal{M}(\bar{e}_L e_L \rightarrow f_R \bar{f}_R)|^2 = 4t^2 |G_{LR}(s)|^2,$$

$$|\mathcal{M}(\bar{e}_R e_L \rightarrow f_L \bar{f}_L)|^2 = 4t^2 |G_{RL}(s)|^2,$$

$$|\mathcal{M}(\bar{e}_L e_R \rightarrow f_R \bar{f}_L)|^2 = 4s^2 |G_{RL}(t)|^2,$$

$$|\mathcal{M}(\bar{e}_R e_L \rightarrow f_L \bar{f}_R)|^2 = 4s^2 |G_{LR}(t)|^2,$$

其中  $t = (p_1 - p_3)^2$ ,  $s = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2$ 。

♣ 把上述结果加到一起, 可得自旋平均的微分截面为:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}(e^+e^- \rightarrow f\bar{f}) &= \frac{1}{16\pi s^2} \left\{ u^2 \left[ |G_{LL}(s) + G_{LL}(t)|^2 + |G_{RR}(s) + G_{RR}(t)|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + t^2 \left[ |G_{LR}(s)|^2 + |G_{RL}(s)|^2 \right] + s^2 \left[ |G_{RL}(t)|^2 + |G_{LR}(t)|^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

散射过程的4-动量, 可得

$$u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta); \quad t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta).$$

♣ 一个左手极化或右手极化的入射轻子  $e_{L,R}^-$  与一个无极化的  $e^+$  的散射截面分别为:

$$\frac{d\sigma_L}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2} \left\{ u^2 |G_{LL}(s) + G_{LL}(t)|^2 + t^2 |G_{LR}(s)|^2 + s^2 |G_{LR}(t)|^2 \right\},$$

$$\frac{d\sigma_R}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2} \left\{ u^2 |G_{RR}(s) + G_{RR}(t)|^2 + t^2 |G_{RL}(s)|^2 + s^2 |G_{RL}(t)|^2 \right\}.$$



## 6.2 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ : 光子传播子贡献

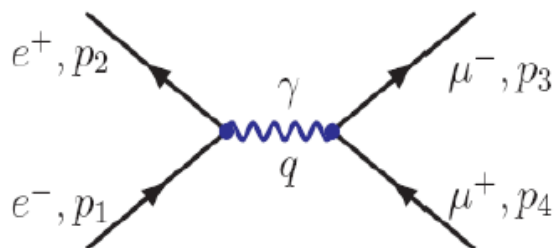


Figure: 8.5  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  散射过程的S-道树图费曼图。

♣ 对  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  过程，只有S道有贡献。我们先考虑光子传播子的贡献，树图费曼图如图-8.5所示。S道的振幅为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) &= \bar{v}(p_2)(-ie\gamma^\mu)u(p_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\bar{u}(p_3)(-ie\gamma^\nu)v(p_4) \\ &= \frac{ie^2}{q^2} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)]. \end{aligned}$$

矩阵元的模方为

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1)\gamma^\nu v(p_2)] \cdot [\bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4) \bar{v}(p_4)\gamma_\nu u(p_3)].$$

## 6.2 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ : 光子传播子贡献

♣ 对于非极化情况，要对初态电子-正电子自旋求平均，对末态 $\mu$ 子自旋求和，所以有

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{s_i} |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \\ &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu] \cdot \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma_\nu]\end{aligned}$$

其中已用到自旋求和关系

$$\begin{aligned}\sum_s u_\alpha(p, s)\bar{u}_\beta(p, s) &= (\not{p} + m)_{\alpha\beta}, \\ \sum_s v_\alpha(p, s)\bar{v}_\beta(p, s) &= (\not{p} - m)_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

♣ , 令  $m_e = 0$  可得

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu] \cdot \text{Tr}[\not{p}_3\gamma_\mu\not{p}_4\gamma_\nu - m_\mu^2\gamma_\mu\gamma_\nu].$$

考虑求Trace公式,

$$\text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu] = 4g_{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma] = 4[g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}].$$

## 6.2 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ : 光子传播子贡献

♣ 代入(8.169)式中可得:

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{4q^4} \{4 [p_1^\nu p_2^\mu + p_1^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu} p_1 \cdot p_2] \\ &\quad \cdot 4 [p_{3\mu} p_{4\nu} + p_{3\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu} (p_3 \cdot p_4 + m_\mu^2)] \} \\ &= \frac{e^4}{4q^4} \cdot 16 \left\{ p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 - p_1 \cdot p_2 (p_3 \cdot p_4 + m_\mu^2) \right. \\ &\quad \left. + p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_2 (p_3 \cdot p_4 + m_\mu^2) \right. \\ &\quad \left. + 4p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4 + 4m_\mu^2 p_1 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4 \right\} \\ &= \frac{8e^4}{q^4} \left\{ p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 + m_\mu^2 p_1 \cdot p_2 \right\}.\end{aligned}$$

另外, 因为  $p_1 + p_2 = q = p_3 + p_4$ , 所以有

$$(p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2.$$

即:  $p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4$ , 同理有  $p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3$ 。

# 6.2 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ : 光子传播子贡献

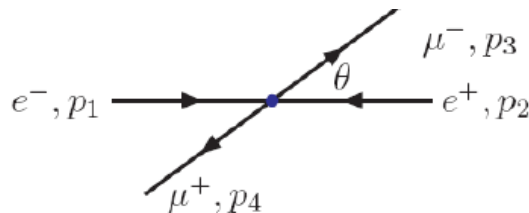


Figure: 8.6 在质心系中的  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  散射过程。

♣ 在  $e^+e^-$  质心系下，我们取  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  过程中的4-动量相对关系如图-8.6所示

$$p_1 = (E, 0, 0, E), \quad p_2 = (E, 0, 0, -E),$$

$$p_3 = (E, |\mathbf{p}_3| \sin \theta, 0, |\mathbf{p}_3| \cos \theta), \quad p_4 = (E, -|\mathbf{p}_3| \sin \theta, 0, -|\mathbf{p}_3| \cos \theta)$$

其中  $|\mathbf{p}_3| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$ 。

♣ 由于  $m_e \ll m_\mu$ ，在下面的计算中，我们忽略含  $m_e$  的项，即

$$q^2 = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2, \quad p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = E^2 - E|\mathbf{p}_3| \cos \theta,$$

$$p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = E^2 + E|\mathbf{p}_3| \cos \theta,$$

把上式代入 式中，可得

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{2E^4} \left[ E^2(E - |\mathbf{p}_3| \cos \theta)^2 + E^2(E + |\mathbf{p}_3| \cos \theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2 \right] \\ &= e^4 \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right]. \end{aligned}$$

## 6.2 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ : 光子传播子贡献

♣ 在质心系下，对 $2 \rightarrow 2$ 过程，其微分截面的表达式为：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2E_1 2E_2 |v_1 - v_2|} \cdot \frac{|\vec{p}_3|}{(2\pi)^2 4E_{cm}} |\mathcal{M}(1+2 \rightarrow 3+4)|^2.$$

对我们的问题，则有：

$$E_1 = E_2 = E, \quad E_{cm} = 2E, \quad |v_1 - v_2| = 2.$$

即

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4S} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{S}} \left[ \left(1 + \frac{4m_\mu^2}{S}\right) + \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{S}\right) \cos^2 \theta \right]$$

其中 $S = q^2 = E_{cm}^2 = 4E^2$ 为质心系能量平方， $\alpha$ 为电磁精细结构常数。

♣ 对相空间体积元 $d\Omega$ 积分可得：

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{S}} \left(1 + \frac{4m_\mu^2}{S}\right).$$

对高能 $e^+e^-$ 对撞机实验， $m_\mu^2/S \ll 1$ ，可以忽略，即有

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3S}.$$

## 6.3 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ : $\gamma$ 和 $Z^0$ 贡献

♣ 在本节，我们以第一节的结果为出发点，同时考虑 $\gamma, Z$ -交换的贡献，来计算 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ 。只考虑 $\gamma$ 光子交换时的详细计算已经在上节给出。对 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 过程，只有 $s$ -道有贡献：

$$G_{AB}(s) = \frac{e^2}{s} + \frac{8G_F}{\sqrt{2}} g_A g_B \mathcal{R}(s)$$

其中第一和第二项分别表示由光子交换、 $Z^0$ 玻色子交换而产生的贡献。因为

$$g_{L,R}^f = (I_3^f)_{L,R} - Q_f \sin^2 \theta_W$$

我们得到

$$g_L^{e,\mu} = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W, \quad g_R^{e,\mu} = \sin^2 \theta_W,$$

$$\mathcal{R}(s) = \frac{m_Z^2}{s - m_Z^2 + i\Gamma_Z m_Z}.$$

♣ 可得

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) &= \frac{1}{16\pi s^2} \left\{ U^2 \left[ |G_{LL}(s)|^2 + |G_{RR}(s)|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + t^2 \left[ |G_{LR}(s)|^2 + |G_{RL}(s)|^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

其中 $dt = (s/2)d\cos\theta$ 。由于

## 6.3 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ : $\gamma$ 和 $Z^0$ 贡献

$$\begin{aligned} |G_{LL}(s)|^2 &= \left| \frac{e^2}{s} + \frac{8G_F}{\sqrt{2}} g_A g_B \mathcal{R} s \right|^2 \\ &= \frac{e^4}{s^2} + 32G_F^2 g_L^4 |\mathcal{R}(s)|^2 + \frac{2e^2}{s} \frac{8G_F}{\sqrt{2}} g_L^2 \text{Re}[\mathcal{R}(s)], \end{aligned}$$

其中第一和第二项分别表示 $\gamma$ -交换和 $Z$ -交换产生的贡献，第三项是两者的干涉项。同理可得：

$$\begin{aligned} |G_{RR}(s)|^2 &= \frac{e^4}{s^2} + 32G_F^2 g_R^4 |\mathcal{R}(s)|^2 + \frac{2e^2}{s} \frac{8G_F}{\sqrt{2}} g_R^2 \text{Re}[\mathcal{R}(s)], \\ |G_{LR}(s)|^2 &= |G_{RL}(s)|^2 \\ &= \frac{e^4}{s^2} + 32G_F^2 g_L^2 g_R^2 |\mathcal{R}(s)|^2 + \frac{2e^2}{s} \frac{8G_F}{\sqrt{2}} g_L g_R \text{Re}[\mathcal{R}(s)]. \end{aligned}$$

把四项相加得到：

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{16\pi s^2} \left\{ \frac{2e^4}{s^2} (u^2 + t^2) + \frac{2e^2}{s} \frac{8G_F}{\sqrt{2}} \left[ (g_L^2 + g_R^2) u^2 + 2g_L g_R t \right] \cdot \text{Re}[\mathcal{R}(s)] \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{8G_F}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[ (g_L^4 + g_R^4) u^2 + 2g_L^2 g_R^2 t^2 \right] \cdot |\mathcal{R}(s)|^2 \right\}. \end{aligned}$$

## 6.3 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ : $\gamma$ 和 $Z^0$ 贡献

♣ 将微分截面 $d\sigma/dt$ 对全空间 $0^\circ \leq \theta \leq \pi$ 积分, 可得

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{3s} + \frac{4s}{3\pi} \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 (g_L^2 + g_R^2) |\mathcal{R}(s)|^2 \\ &+ \frac{4\alpha}{3} \frac{G_F}{\sqrt{2}} (g_L^2 + g_R^2) \cdot \text{Re}[\mathcal{R}(s)].\end{aligned}$$

这里的第一、二和第三项分别表示由 $\gamma$ 交换,  $Z$ 交换和干涉项给出的贡献。  
对不同的能量区间, 有

1. 在低能区间:  $s \ll m_Z^2$ , 有

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|_{\gamma^*} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

2. 在 $Z$ 共振区,  $Z$ 玻色子贡献是主要贡献, 在只考虑 $Z$ 贡献的近似下有:

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|_Z &= \frac{4}{3\pi} \left(\frac{G_F m_Z^2}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{s (g_L^2 + g_R^2)^2}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2} \\ &= 12\pi \cdot \frac{s/m_Z^2}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2} \Gamma_{ee} \Gamma_{\mu\mu}.\end{aligned}$$

3. 如果采用 $Z$ -窄共振近似, 则有

$$\frac{1}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2} \approx \frac{\pi}{m_Z \Gamma_Z} \delta(s - m_Z^2).$$



# 6.4 $\sigma(e^+e^- \rightarrow qq)$ (hadrons)

♣ 在最低阶，只有s-道树图对此类过程有贡献。当  $m_q \ll \sqrt{s}$  时(即在  $m_e = m_q = 0$  近似下)，只考虑光子的贡献，跃迁振幅为

$$\mathcal{M} = e^2 e_q \delta_{ij} \bar{v}(P_1) \gamma_\mu u(p_2) \frac{g^{\mu\nu}}{s} \bar{u}_i(q_1) \gamma_\nu v_j(q_2),$$
$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = e^4 \cdot e_q^2 N_c \cdot 8 \cdot \frac{(p_1 \cdot q_1)^2 + (p_1 \cdot q_2)^2}{s},$$

其中  $N_c = 3$  表示颜色自由度，并且有

$$p_1 \cdot q_1 = \frac{s}{4}(1 - \cos \theta), \quad p_1 \cdot q_2 = \frac{s}{4}(1 + \cos \theta),$$

$$\frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 = (4\pi\alpha)^2 e_q^2 N_c (1 + \cos^2 \theta).$$

♣ 该过程的相空间可以取为

$$d\Phi = \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3 2E_2} \cdot (2\pi)^4 \cdot \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) = \frac{d \cos \theta}{16\pi}.$$

过程的总截面为

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \frac{1}{2s} \int \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 d\Phi = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot e_q^2 \cdot N_c$$

## 6.4 $\sigma(e^+e^- \rightarrow qq)$ (hadrons)

♣ 由上式可以得到在较低能区( $s \ll m_Z^2$ )  $R$ 参数的表达式

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_q N_c e_q^2 = \frac{11}{3} \quad \text{for } q = (u, d, c, s, b).$$

$\sqrt{s} \sim 10\text{GeV}$ 时, 有效夸克为(u,d,c,s,b), 相对应的 $R$ 参数的实验测量值为

$$R^{\text{exp}} = 3.88 \pm 0.06,$$

与 $N_c = 3$ 时的理论预言值符合。

♣ 当质心系能量提高时,  $Z^0$ 的贡献就会越来越大, 同时考虑光子和 $Z^0$ 玻色子的贡献, 对于 $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ 的一般情况, 微分截面可以写为[117]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f})}{d\cos\theta} &= \frac{\pi}{2s} N_c^f \left\{ |\alpha(s) Q_f|^2 (1 + \cos^2\theta) \right. \\ &\quad - 8\text{Re} \left\{ \alpha^*(s) Q_f \chi(s) \left[ \mathcal{G}_{V_e} \mathcal{G}_{V_f} (1 + \cos^2\theta) + 2\mathcal{G}_{A_e} \mathcal{G}_{A_f} \cos\theta \right] \right\} \\ &\quad + 16|\chi(s)|^2 \left\{ \left( |\mathcal{G}_{V_e}|^2 + |\mathcal{G}_{A_e}|^2 \right) \left( |\mathcal{G}_{V_f}|^2 + |\mathcal{G}_{A_f}|^2 \right) (1 + \cos^2\theta) \right. \\ &\quad \left. \left. + 8\text{Re} \left[ \mathcal{G}_{V_e} \mathcal{G}_{A_e}^* \right] \text{Re} \left[ \mathcal{G}_{V_f} \mathcal{G}_{A_f}^* \right] \cos\theta \right\} \right\}, \end{aligned}$$

其中色因子 $N_c^l = 0$ ,  $N_c^q = 3$ ,  $\theta$ 表示出射费米子 $f$ 与 $e^-$ 入射方向的夹角。上式中的第一项是虚光子 $\gamma$ -交换图的贡献, 第二项是 $\gamma$ - $Z$ 干涉项的贡献, 最后一项是 $Z$ -交换图的贡献。

## 6.4 $\sigma(e^+e^- \rightarrow qq)$ (hadrons)

♣ 微分截面表达式(8.202)中其它相关函数为:

$$\chi(s) = \frac{G_F M_Z^2}{8\pi\sqrt{2}} \frac{s}{s - M_Z^2 + iS\Gamma_Z/M_Z}$$
$$G_{V_f} = \sqrt{\mathcal{R}_f} \left( T_3^f - 2Q_f \kappa_f \sin^2 \theta_W \right), \quad G_{A_f} = \sqrt{\mathcal{R}_f} T_3^f,$$

其中 $\chi(s)$ 表示“BW”传播子,  $G_{V_f}$ 和 $G_{A_f}$ 表示包含了主要电弱圈图修正的有效耦合[117]。  $\mathcal{R}_f$ 表示一般的电弱圈图修正因子,  $\kappa_f$ 则表示对 $\sin^2 \theta_W$ 的电弱圈图修正。

# 6.4 $\sigma(e^+e^- \rightarrow qq)$ (hadrons)

♣ 在各个能区的正负电子对撞机实验，均可以对 $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ 的产生截面做精确测量。图-8.7表示1973年以来先后运行的几个正负电子对撞机实验，在不同能区 $0 \leq E_{CM} \leq 209$  GeV 对强子产生截面 $\sigma_{had}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ 的精确实验测量结果。

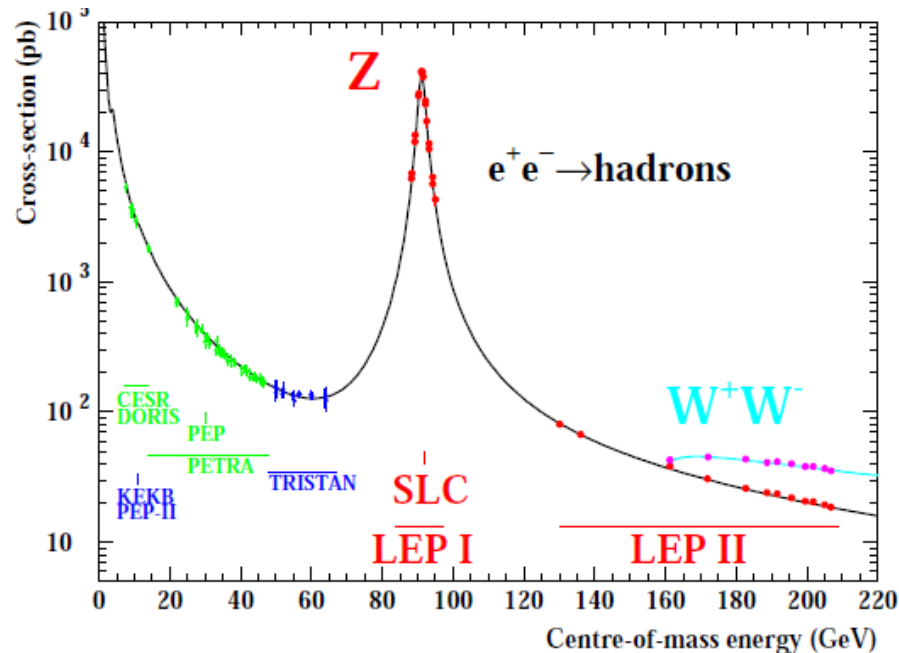


Figure: 8.7  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ 。实线表示SM理论预言，数据点表示各个相关实验的测量结果。

## 6.4 $\sigma(e^+e^- \rightarrow qq)$ (hadrons)

♣ 从图-8.7的左边低能区开始，首先是德国DESY的DORIS，其最大质心系能量为11.2 GeV，运行时间为1973-1983年。美国康奈尔的CESR，最大质心系能量为12 GeV，运行时间为1979-2002年。然后是KEKB和PEP-II(B介子工厂)，1999年投入运行，主要运行在 $\Upsilon(4S)$ 的共振态峰值 $E_{CM} = 10.5$  GeV附近。德国DESY的PETRA的最大质心系能量为46.8 GeV，运行时间为1978-1986年。美国SLAC的PEP最大质心系能量为30 GeV，运行时间为1980-1990年。这些实验对 $\sigma_{had}$ 的实验测量数据为左侧的绿色误差棒。显然，这些实验的测量精度很高。日本KEK的TRISTON，最大质心系能量为64 GeV，运行时间为1987-1995年，其实验数据为蓝色误差棒。

♣ 由图-8.7中曲线可以看到两个峰值，一个在低端： $E_{CM} \sim 0$ 附近，一个在 $Z^0$ 介子质量 $M_Z \approx 91$  GeV附近。当质心系能量比较小时，虚光子交换过程起主要作用。然后随着 $E_{CM}$ 变大，产生截面由第一个峰值处按照 $1/s$ 快速下降。在 $m_Z$ 附近能区， $Z^0$ 共振贡献起主要的作用。

♣ 当 $E_{CM} \geq 2m_W$ 时，LEP实验进入 $W^+W^-$ 对产生阶段。在 $Z^0$ 峰值附近 $m_Z \pm 3$  GeV区间的7个能量点上，四个LEP实验组合计采集了大约1700万个 $Z^0$ 玻色子产生和衰变事例，对 $Z^0$ 介子的性质做了精确测量，与标准模型理论预言值高度符合。

# 量子色动力学

- 量子色动力学拉氏量
- 色因子核位势
- 正规化与重整化
- 跑动耦合常数 $\alpha_s$
- 重整化群的不变性
- 软胶子辐射
- 三喷注物理和胶子发现

# 量子色动力学理论

♣ 上世纪七十年代初，美国斯坦福直线加速器中心(SLAC)的物理学家进行了一系列的轻子-核子( $eN$ 和 $\nu N$ )深度非弹性散射(DIS)实验，发现质子内部有定域的散射中心，发现强子的结构函数具有比约肯无标度性(Bjorken Scaling)。为解释这些令人惊奇的结果，费曼提出了关于核子的部分子模型[84]：假设核子是由点状(point-like)的部分子(parton)组成；部分子在深度非弹性散射过程中是近似自由的。采用部分子模型可以自然的解释比约肯无标度性。更细致的研究确认了部分子的自旋为 $1/2$ ，并且具有分数电荷。

♣ 人们进一步对深度非弹性散射实验数据的分析得出结论：这些点状的部分子具有和夸克模型中夸克相同的量子数，如自旋、电荷、味道（同位旋）等。除了带电的部分子，实验数据和理论分析还表明除了夸克之外，还存在中性的部分子-即量子色动力学(QCD)中的胶子。

♣ 但实验上没有看到自由的部分子。那么一个自然的问题就是，这些部分子是怎样束缚在强子中的？或者说，部分子之间相互作用的动力学机制什么？在上世纪70-80年代提出的QCD成功的回答了这个问题。

# 1. 强相互作用的拉氏量

♣ 描写夸克、胶子之间强相互作用的规范群是 $SU(3)_C$ 。我们用 $q_f^\alpha$ 表示夸克场，其中 $f$ 表示夸克的味道， $\alpha$ 表示夸克的色指标。在色空间写为：

$$q_f^\alpha \equiv (q_f^1, q_f^2, q_f^3).$$

那么在色空间，自由拉氏量

$$\mathcal{L}_0 = \sum_f \bar{q}_f (i\not{\partial} - m_f) q_f$$

在任意的整体 $SU(3)_C$ 规范变换 $U$ 下的变换为，

$$q_f^\alpha \longrightarrow (q_f^\alpha)' = U^\alpha_\beta q_f^\beta, \quad UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1,$$

$\mathcal{L}_0$ 是不变的。 $SU(3)_C$ 整体规范变换矩阵可以写为

$$U = \exp \left\{ i \frac{\lambda^a}{2} \theta_a \right\},$$

其中 $\frac{1}{2} \lambda^a$  ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ) 表示 $SU(3)_C$ 基础表示的生成元， $\theta_a$ 是群参数。矩阵 $\lambda^a$ 是无迹矩阵，且满足如下对易关系

$$\left[ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2},$$

其中 $f^{abc}$ 是 $SU(3)_C$ 规范群的结构常数，它是反对称的实数。



# 1 强相互作用的拉氏量

♣ 与QED类似，我们可以要求体系的拉氏量在定域 $SU(3)_C$ 规范变换( $\theta_a = \theta_a(x)$ )下保持不变。为了满足这个要求，需要把对夸克波函数的微商变成协变微商。因为现在有8个独立的规范参数，所以需要8个不同的规范玻色子场-胶子场 $G_a^\mu(x)$ ：

$$D^\mu q_f \equiv \left[ \partial^\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^\mu(x) \right] q_f \equiv [\partial^\mu - ig_s G^\mu(x)] q_f .$$

♣ 强相互作用的强度用耦合常数 $g_s$ 来表示，通常定义 $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ 。请注意，我们在上式中使用了矩阵的缩写形式 $G^\mu(x)$ ：

$$[G^\mu(x)]_{\alpha\beta} \equiv \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)_{\alpha\beta} G_a^\mu(x) .$$

♣ 我们要求 $D^\mu q_f$ 和夸克波函数 $q_f$ 具有完全相同的变换方式，即

$$(D^\mu q_f)' = U (D^\mu q_f)$$

进而导出协变导数和胶子场的规范变换性质：

$$D^\mu \rightarrow (D^\mu)' = U D^\mu U^\dagger, \quad G^\mu \rightarrow (G^\mu)' = U G^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial^\mu U) U^\dagger .$$

# 1 强相互作用的拉氏量

♣ 在无穷小 $SU(3)_c$ 变换下,

$$U = 1 - i \frac{\lambda^a}{2} \theta_a$$

其中规范参数 $|\theta_a| \ll 1$ ,  $q_f^\alpha$  和  $G_a^\mu$  的规范变换为

$$q_f^\alpha \longrightarrow (q_f^\alpha)' = q_f^\alpha + i \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)_{\alpha\beta} \theta_a q_f^\beta,$$
$$G_a^\mu \longrightarrow (G_a^\mu)' = G_a^\mu + \frac{1}{g_s} \partial^\mu (\theta_a) - f^{abc} \theta_b G_c^\mu.$$

显然, 胶子场 $G_\mu^a$ 的规范变换要比QED光子场 $A_\mu$ 的变换复杂的多。

♣ 为了构造一个规范不变的胶子场的动能项, 我们引入对应的场强张量:

$$G^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{i}{g_s} [D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - ig_s [G^\mu, G^\nu] \equiv \frac{\lambda^a}{2} G_a^{\mu\nu}(x),$$
$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu.$$

在规范变换下, 场强张量 $G^{\mu\nu}$ 的变换为

$$G^{\mu\nu} \longrightarrow (G^{\mu\nu})' = U G^{\mu\nu} U^\dagger.$$

对色指标的求迹为 $\text{Tr}(G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a$ , 在规范变换下保持不变。

# 1 强相互作用的拉氏量

♣ 对胶子动能项做适当的归一化，我们最后得到在  $SU(3)_C$  定域规范变换下不变的QCD拉氏量：

$q_f$ ：携带色荷的夸克场旋量

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \equiv -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f.$$

♣ 我们可以把QCD拉氏量分解为如下几个部分：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{4} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) + \sum_f \bar{q}_f^\alpha (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_f^\alpha \\ & + g_s G_a^\mu \sum_f \bar{q}_f^\alpha \gamma_\mu \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)_{\alpha\beta} q_f^\beta \\ & - \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \end{aligned}$$

上式中的第一行给出了各个场的动能项，由此可以导出对应的传播子。第二行给出了夸克-胶子相互作用项： $\bar{q}qg$ 顶角耦合。最后一行给出了三胶子和四胶子自耦合项。这三种主要的QCD相互作用顶点费曼图在图-7.1中给出。

# 1 强相互作用的拉氏量

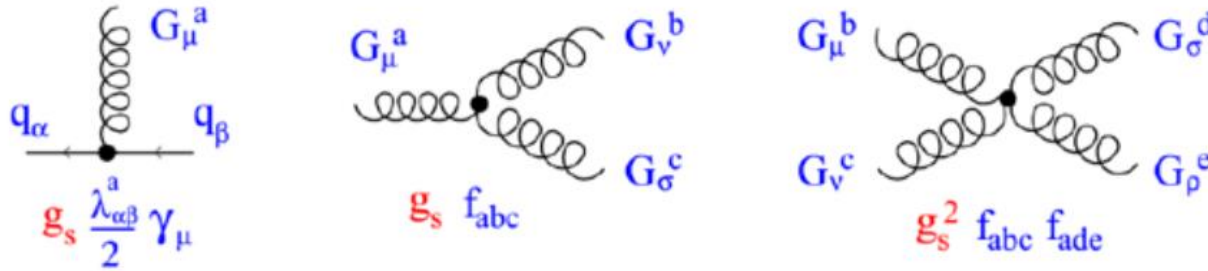


Figure: 7.1 QCD拉氏量的相互作用顶角：夸克胶子顶点，三胶子顶点，四胶子顶点。

当胶子和夸克相互作用时，将在  $SU(3)$  空间旋转夸克的色荷。 $g_s$  是  $QCD$  强相互作用的耦合常数， $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ 。 $g_s$ （或  $\alpha_s$ ）和夸克的质量  $m_q$  是  $QCD$  理论中最基本的物理参数。胶子规范场张量由下式给出，

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu.$$

在  $QCD$  规范理论中包含了胶子和夸克-反夸克的相互作用顶点，类似于  $QED$  的光子和带电费米子-反费米子耦合，此外在  $QCD$  中还有 3 胶子和 4 胶子的相互作用顶点，这在阿贝尔规范理论  $QED$  中是没有可以类比的。 $QED$  中的光子虽然和带电粒子相互作用，但光子本身是中性不带电的，而在  $QCD$  中胶子携带色荷，因而具有自相互作用。

# 1 强相互作用的拉氏量

♣ 在强相互作用的拉氏量  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  中，我们用一个普适的“strong coupling constant”  $g_s$  来描写粒子间的强相互作用。不用做计算，就可以从所定义的拉氏量  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  表达式中发现一些定性的物理结果：例如，夸克线可以直接辐射出胶子。在LEP正负电子对撞机实验中，人们不但发现了

$$Z^0 \rightarrow q\bar{q},$$

的“2-jet”事例(如图-7.2的左图所示)，同时还发现了

$$Z^0 \rightarrow q\bar{q}g,$$

的“3-jet”事例(见图-7.2的右图)。根据“3-jet”和“2-jet”事例数之比，可以对  $\alpha_s(m_Z)$  的大小给出一个简单的估计： $\alpha_s \equiv g_s^2/(4\pi) \sim 0.12$ 。

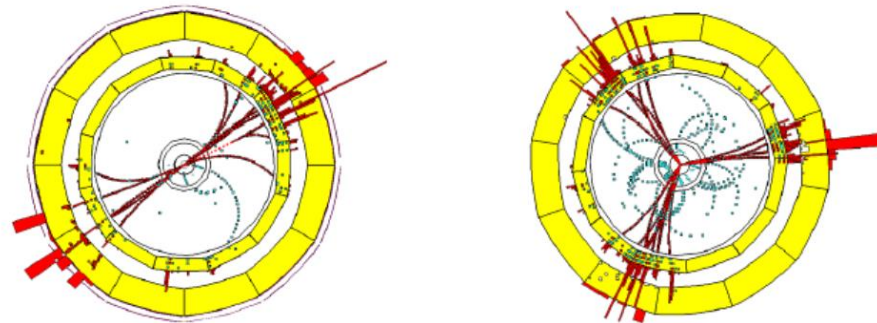


Figure: 7.2 在LEP  $e^+e^-$  对撞机上ALEPH实验组观察到的 $Z^0$ 玻色子的强子衰变过程的2-喷注和三喷注事例： $Z^0 \rightarrow q\bar{q}$  和  $Z^0 \rightarrow q\bar{q}G$ 。

# 1 强相互作用的拉氏量

♣ 与QED中的光子场 $A_\mu$ 情况不同，在QCD中胶子场有自作用，强相互作用的耦合常数 $\alpha_s$ 与QED的 $\alpha$ 有很大不同，当相互作用能量变大时，它不是变强，而是变弱。这个性质被称为渐进自由。对高能QCD计算，可以使用微扰论。1973年，D.J. Gross, F. Wilczek 和D. Politzer 发现了用 $SU(3)_c$ 规范群描写的强相互作用是渐近自由的[85,86]。同年，S. Coleman 和D.J. Gross 还证明了只有非阿贝尔规范场理论才可能是渐近自由的[87]。1974年，t' Hooft 在一维时间、一维空间下，同时证明了渐近自由和夸克禁闭[88]。K.G. Wilson在格点规范理论中也证明了夸克禁闭[89]。在这种格点理论中，时空连续体被分立的欧几里德点阵所代替。

♣ 显然，QCD强相互作用具有特殊的性质：

- (1) **渐进自由**：当夸克之间距离很小，或者当动量转移 $Q^2$ 很大时，夸克之间的相互作用变的很弱，可以近似地看成自由粒子。
- (2) **夸克禁闭**：当夸克之间距离比较大，或者当动量转移小时，夸克之间的相互作用变的很大，使得夸克被“禁闭”在强子内部。因此找不到“自由夸克”或者“自由胶子”。

实验上并没有观测到自由存在的夸克或胶子，所有的强子都是色荷的单态，即无色的，因此是夸克、反夸克、以及胶子的组合态，也就是说这些携带色荷的部分子都是禁闭在强子之内的。

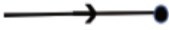

# 1 强相互作用的拉氏量

## QCD 费曼规则:



夸克和胶子外线的费曼规则类似于量子电动力学, 只是包含了色荷

动量为  $p$ , 自旋  $s$ , 颜色  $c$ :

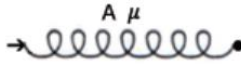

夸克外线:

入射:		$u^{(s)}(p)c$
出射:		$\bar{u}^{(s)}(p)c^\dagger$

反夸克外线:

入射:		$\bar{v}^{(s)}(p)c^\dagger$
出射:		$v^{(s)}(p)c$

极化矢量为  $\epsilon$ , 色荷为  $A$  的胶子外线:

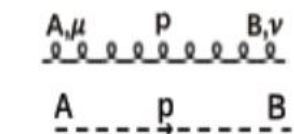
入射:		$\epsilon_\mu(p)a^A$
出射:		$\epsilon_\mu^*(p)a^{A*}$

# 1 强相互作用的拉氏量

由拉氏量+  
规范固定项+  
鬼项拉氏量



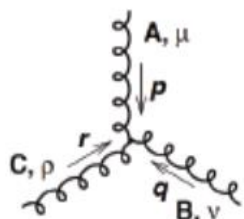
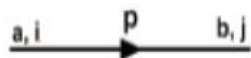
传播子、顶  
点的费曼规  
则



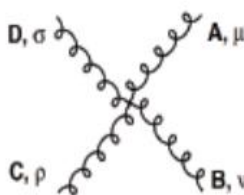
$$\delta^{AB} \left[ -g^{\mu\nu} + (1-\xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 + i\epsilon} \right] \frac{i}{p^2 + i\epsilon}$$

$$\delta^{AB} \frac{i}{p^2 + i\epsilon}$$

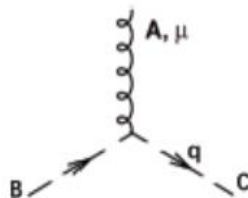
$$\delta^{ab} \frac{i}{(\gamma^\mu p_\mu - m + i\epsilon)_{ji}}$$



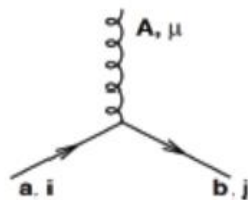
$$-g_s f^{ABC} [(p-q)^\rho g^{\mu\nu} + (q-r)^\mu g^{\nu\rho} + (r-p)^\nu g^{\rho\mu}]$$



$$-g_s^2 f^{XAC} f^{XBD} [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] + (C, \rho) \leftrightarrow (D, \sigma) + (B, \nu) \leftrightarrow (C, \rho)$$



$$g_s f^{ABC} q^\mu$$



$$-i g_s (t^A)_{ba} (\gamma^\mu)_{ji}$$

螺旋线：胶子线

虚线：鬼粒子

实现：正反夸克

为了定义胶子场的传播子，拉氏量必须加入一个规范固定项，同时辅之于一个鬼项拉氏量，用于消除非物理的纵向自由度，避免它们在协变规范中传播



# 2 色因子和位势

我们已经知道，夸克携带三种色荷，是  $SU(3)_C$  的基础表示  $\underline{3}$ ，而反夸克则是其共轭表示  $\underline{3}^*$ ，胶子的色荷来自于  $\underline{3}$  和  $\underline{3}^*$  的直乘，以  $r, g, b$  表示红、绿、蓝三种颜色，将其分量形式写出来则为：

八重态： $r\bar{g}, r\bar{b}, g\bar{b}, g\bar{r}, b\bar{r}, b\bar{g}, \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$ ;

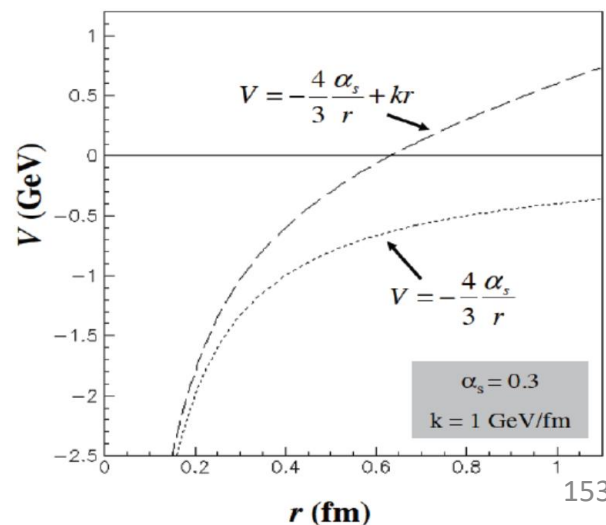
对称单态： $\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$ .

对称的单态就意味着是无色的，可以以自由态存在，但我们并没有观测到这种胶子，因此胶子一定是携带色荷的，以八重态的形式存在。

- 夸克- (反)夸克相互作用：由于看不到最低阶的 QCD 作用截面，往往用类似库伦位势类似的有效势来讨论
- Cornell 库伦势，可以计算夸克偶素能谱
- 但不能期望给出禁闭项所有的短程行为特征
- 然而通过类似讨论可以得到**启发性结论**：当相互作用的夸克处于**色单态**时它们之间的**吸引力最强**

康乃尔 (Cornell) 库伦势

$$V(r) = -\frac{4}{3}\alpha_s(r)/r + kr + C$$

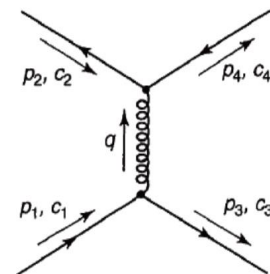


# 2 色因子和位势

## 夸克-反夸克相互作用:

先来看夸克和反夸克之间的相互作用，假定它们具有不同的味道，例如  $u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}$ ，如图 5.2所示，其振幅为：

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= i[\bar{u}(3)c_3^\dagger] [-ig_s t^A \gamma^\mu] [u(1)c_1] \left[ \frac{-ig_{\mu\nu} \delta^{AB}}{q^2} \right] \cdot [\bar{v}(2)c_2^\dagger] [-ig_s t^B \gamma^\nu] [v(4)c_4] \\ &= \frac{g_s^2}{q^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)] \underline{(c_3^\dagger t^A c_1)(c_2^\dagger t^A c_4)} \end{aligned}$$



夸克-反夸克相互作用示意图。

此式和正负电子散射的表达式比较，除了将电磁耦合常数  $e$  换成强耦合常数  $g_s$  以外，还多出了一个“色因子”：

$$f = (c_3^\dagger t^A c_1)(c_2^\dagger t^A c_4)$$

因此描写  $q\bar{q}$  相互作用的势和两个电荷相反的库伦位势相比较，只是将  $\alpha$  换成  $\alpha_s$ ，并乘以色因子  $f$ ：

$$V_{q\bar{q}}(r) = -f \frac{\alpha_s}{r}$$

# 2 色因子和位势

色因子依赖于相互作用的夸克的色荷状态:

一个正反夸克对可以组成色的八重态和单态

典型的八重态 $r\bar{g}$ 例子:

入射夸克是红的, 反夸克是绿的



颜色守恒

出射的夸克也是红的, 反夸克也是绿的

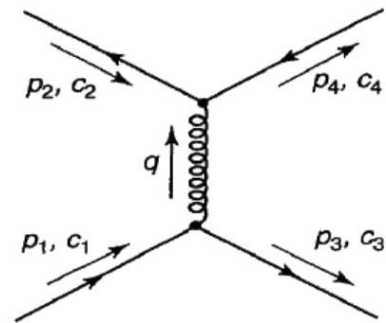


图 5.2: 夸克-反夸克相互作用示意图。

$$c_1 = c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2 色因子和位势

因此,

矩阵 $t$ 是SU(3)群的基础表示

$$f = \left[ (1 \ 0 \ 0)t^A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (0 \ 1 \ 0)t^A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = t_{11}^A t_{22}^A = \frac{1}{4} \lambda_{11}^A \lambda_{22}^A$$

具有非零的 11 和 22 分量的  $\lambda$  矩阵只有  $\lambda^3$  和  $\lambda^8$ , 计算得到色因子为:

$$f = \frac{1}{4}(\lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8) = \frac{1}{4}[(1)(-1) + (1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})] = -\frac{1}{6}.$$

# 2 色因子和位势

色单态  $q\bar{q}$  系统  $r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}$

入射夸克色单态：三项求和

$$f = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[ c_3^\dagger t^A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] [(1\ 0\ 0)t^A c_4] + \left[ c_3^\dagger t^A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] [(0\ 1\ 0)t^A c_4] + \left[ c_3^\dagger t^A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] [(0\ 0\ 1)t^A c_4] \right\}$$

出射夸克也是色单态：三项求和

初末态乘积共9项  $f = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} (t_{ab}^A t_{ba}^A) = \frac{1}{3} \text{Tr}(t^A t^A) = \frac{4}{3}$

位势：

色单态：  $V_{q\bar{q}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}$ ,

色八重态：  $V_{q\bar{q}}(r) = \frac{1}{6} \frac{\alpha_s}{r}$ .

色单态是负位势，是吸引力，而色八重态是正势，是排斥力

这就解释了形成介子的正反夸克是色单态，而不是八重态，八重态带有颜色

## 2 色因子和位势

夸克-夸克相互作用:

图 5.3是两个夸克散射的示意图, 例如  $u + d \rightarrow u + d$ 。按费曼规则得到其振幅为:

$$\mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{q^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)](c_3^\dagger t^A c_1)(c_4^\dagger t^A c_2)$$

相应的色因子为:

$$f = (c_3^\dagger t^A c_1)(c_4^\dagger t^A c_2)$$

同样的, 色因子依赖于夸克的颜色位型。

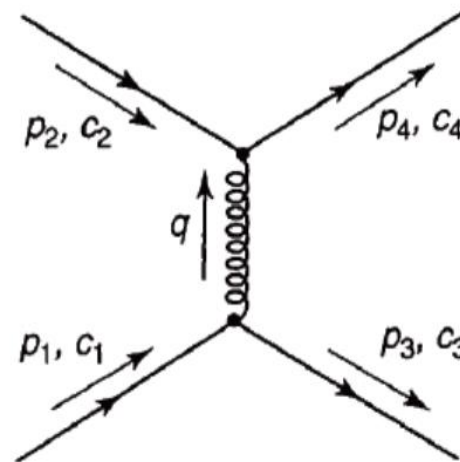


图 5.3: 夸克-夸克相互作用示意图。

## 2 色因子和位势

两个夸克不能形成色单态或八重态，只可约化为反对称的三重态和对称六重态

$$\text{三重态: } \begin{cases} (rg - gr)/\sqrt{2} \\ (gb - bg)/\sqrt{2} \\ (br - rb)/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{六重态: } \begin{cases} rr, & gg, & bb \\ (rg + gr)/\sqrt{2}, & (gb + bg)/\sqrt{2}, & (br + rb)/\sqrt{2} \end{cases}$$

这和群论的语言是一致的，因为在群论中夸克属于  $SU(3)$  群的三维基础表示  $\underline{3}$ ，反夸克属于三维共轭表示  $\underline{3}^*$ ，表示的直乘约化为

$$\underline{3} \otimes \underline{3}^* = \underline{8} \oplus \underline{1}, \quad \underline{3} \otimes \underline{3} = \underline{6} \oplus \underline{3}^*$$

六重态的色因子计算比较简单，可以以  $rr$  为例计算之；而在三重态的计算中，例如  $rg - gr \rightarrow rg - gr$ ，则要计及  $rg \rightarrow rg$ ， $rg \rightarrow -gr$ ， $-gr \rightarrow rg$  和  $-gr \rightarrow -gr$  四项。最后得到的色因子分别为

$$f_{\text{三重态}} = -\frac{2}{3}, \quad f_{\text{六重态}} = \frac{1}{3}$$

## 2 色因子和位势

注意这时位势应取为和电磁学中同号电荷相互作用势相同的形式，即

$$V_{qq}(r) = f \frac{\alpha_s}{r}$$

代入上面色因子  $f$  的计算值得到

$$\text{三重态: } V_{qq}(r) = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{r}, \quad \text{六重态: } V_{qq}(r) = \frac{1}{3} \frac{\alpha_s}{r}$$

这里我们注意到反对称的三重态位势是吸引的，而对称的六重态位势则是排斥的。对两个夸克的系统，这可能并没有什么意义，因为自然界并不存在这样组合的粒子，然而在讨论三个夸克组成重子时却具有重要的物理意义。



## 2 色因子和位势

重子3个SU(3)群基础表示3的直乘约  $\underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3} = \underline{10} \oplus \underline{8} \oplus \underline{8} \oplus \underline{1}$

- 1) **单态**是完全反对称的，每个夸克对都处在反对称的三重态，它们之间都是互相吸引，结合最牢固
- 2) **十重态**中每个夸克对都处在对称六重态，相互之间是排斥的。
- 3) 两个**八重态**中有些夸克对是处于反对称的三重态，有些处于对称的六重态，既有吸引又有排斥。

**重要结论：**当重子处于色单态时是最稳定的，如同介子

# 3 正规化和重整化

在计算包含有圈图的费曼图时，对圈图动量的积分会出现发散。为得到有意义的物理量，通常采用正规化 (regularization) 的方案，使得这些量看上去暂时是有限的，这就需要引入一些截断参数，诸如胶子质量、紫外动量截断、或者维数正规化，即将 4 维时空改记为  $D = 4 - 2\epsilon$  维， $\epsilon$  是小量。维数正规化法是由杰拉德·特·胡夫特 (Gerard 't Hooft) 和韦尔特曼 (Martinus J. G. Veltman) 引入的，出现较晚，比较先进，但也并非是万能的。通过这种正规化处理，将无意义的发散积分看成是有限积分后取极限。正规化之后，这些微扰理论的发散部分可以被吸收到用重整化方法重新定义的物理量中，把无穷大在取积分之前就消除掉，这就是重整化。重整化可以有不同的方案，需要引入一个新的量纲标度  $\mu$ 。不同的重整化方案可以有不同的  $\mu$ ，但得到的可观测振幅应该是相同的。当  $\mu$  改变时重整化操作变换的全体构成一个李群，斯塔克伯格 (Ernst C. G. Stueckelberg) 和彼得曼 (A. Peterman) 最早认识到这一点，并将其定义为重整化群。表示在  $\mu$  变化下物理量不变性的方程称为重整化方程 (RGE)。RGE 在量子场论 (不管是标准模型还是超对称模型) 中有着重要的作用，例如，应用 RGE 可以自然得到量子色动力学 (QCD) 的渐进自由性质，应用 RGE 可以得到超对称模型中各种规范耦合常数在标度下的统一，利用 RGE 可以讨论超对称粒子的质量谱，等等。

# 3 正规化和重整化

## 3.1 维数正规化

*QCD* 计算即使在很高的动量转移  $Q^2$  下，耦合常数值微扰展开的收敛也是相当慢的，需要若干阶的微扰计算才能给出比较理想的精度。随着微扰阶数的增加计算的复杂性急剧增大，而且在大多数的高阶计算中都会出现无穷大的发散问题，一个最典型的例子是计算夸克自能图修正时所谓的紫外发散。利用前面给出的费曼规则可以写下 [5]，

$$\begin{array}{c} l \\ \text{~} \\ \begin{array}{c} \text{p} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{p} \\ \text{p-l} \end{array} \end{array} = (-ig)^2 C_F \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{l}} \gamma_\nu \left( -\frac{ig^{\mu\nu}}{l^2} \right) \equiv i\not{p}\Sigma(p),$$

其中  $\not{p} = \gamma^\lambda p_\lambda$ ，容易求得  $\Sigma(p)$  的表达式，

$$\Sigma(p) = iC_F \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2(p-l)^2},$$

当  $|l| \rightarrow \infty$  时它是对数发散的。

# 3 正规化和重整化

现在来看如何用维数正规化的方法来处理这种发散的积分。这种表达式的典型形式可写为

$$I(M^2) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 + M^2]^2}.$$

容易证明前面夸克自能图中的积分可化为,

$$\frac{1}{l^2} \frac{1}{(l-p)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[l^2 + M^2]^2}, \quad L = l - xp, M^2 = x(1-x)p^2.$$

当然除了这问题最直接的方法是利用动量截断来正规化积分，然后再重整化阶段将发散部分删除

# 3 正规化和重整化

维数正规化出来方法:

现在大多采用时空维数正规化的方法, 普遍认为这是一种最好的正规化方法。注意到若在  $D < 4$  维的时空中计算上面的积分就是有限的, 可以记,

$$I_D(M^2) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{[l^2 + M^2]^2}.$$

在  $D < 4$  的时空中进行所有的计算操作, 正规化发散, 然后重整化场量和耦合常数, 最后取极限回到  $D = 4$ 。

在欧几里得度规中,

$$d^D l = d\Omega_{D-1} l^{D-1} dl,$$

$d\Omega_{D-1}$  是  $D$  维时空的微分立体角,  $\Omega_{D-1}$  是  $D$  维球体的表面。计算给出,

$$I_D(M^2) = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - D/2)}{\Gamma(2)} (M^2)^{D/2-2}.$$

# 3 正规化和重整化

定义  $D = 4 - 2\epsilon$ ，最终会取  $\epsilon \rightarrow 0$  的极限回到  $D = 4$ 。现在取  $\epsilon$  为一个小量，则有，

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon),$$

$\gamma_\epsilon = 0.577215\dots$  是欧拉 (Euler) 常数。最后可得，

$$(4\pi)^2 I_D(M^2) \rightarrow \frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi M^2 - \gamma_\epsilon.$$

积分的发散部分可以正规化为在  $D = 4$  处的极点，依赖于  $M$  的部分是对数形式的，正如我们所期待的那样，因为积分在  $D = 4$  时是 0 维的。

# 3 正规化和重整化

## 不同的减除方案将消除极点

仅减除  $1/\epsilon$  极点的方案称为最小减除 (Minimal subtraction) 方案, 通常记为  $MS$ ; 将  $1/\epsilon - \gamma_\epsilon + \ln 4\pi$  一同减除的方案称为改进的最小减除 (Modified minimal subtraction) 方案, 记为  $\overline{MS}$ , 现在已被广泛采用。我们在此采用  $MS$  减除方案消除发散的  $1/\epsilon$  极点, 表达式可记为,

$$I(M^2) = I(\mu^2) + (4\pi)^2 \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right),$$

这里的减除能标  $\mu^2$  通常被称为重整化能标。可以证明在别的圈图中的发散积分也可用完全相似的方法处理正规化出现的  $1/\epsilon$  极点。 $QCD$  单圈图阶的重整化除了夸克自能图外, 还有胶子自能图, 夸克对和胶子的耦合, 以及三胶子的耦合。所有这些修正计算中都会出现无穷大, 需要用维数正规化处理。出于重整化的考虑, 可以将  $D$  维的概念不仅仅是用于无穷大积分的处理, 而是应用于完整的理论本身。换句话说我们应用  $D$  维空间中的拉氏量来描写场量的相互作用。除了场量和耦合的正则维数移动外, 形式上没有别的变化。这是因为作用量, 即拉氏量的时空积分, 是一个维数为 0 的无量纲量。

# 3 正规化和重整化

结果是所有的场量和耦合常数的正则量纲都依赖于D:

$$\begin{aligned}\left[ \int d^D x \mathcal{L}(x) \right] &= 0 \Rightarrow [\mathcal{L}] = D = 4 - 2\epsilon, \\ [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] &= D \Rightarrow [\phi] = 1 - \epsilon, \\ [\bar{\psi} \not{\partial} \psi] &= D \Rightarrow [\psi] = 3/2 - \epsilon, \\ [F^{\mu\nu, A} F_{\mu\nu}^A] &= D \Rightarrow [A] = 1 - \epsilon, \\ [\bar{\psi} \not{A} \psi g] &= D \Rightarrow [g] = \epsilon.\end{aligned}$$

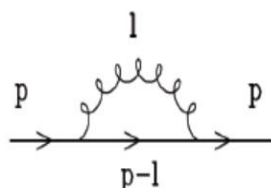
规范耦合常数获得了量纲。



# 3 正规化和重整化

## 3.2 重整化

夸克自能图为例：

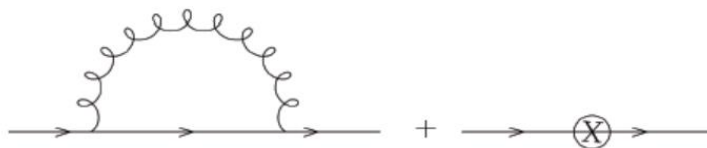


$$= (-ig)^2 C_F \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{l}} \gamma_\nu \left( -\frac{ig^{\mu\nu}}{l^2} \right) \equiv i\not{p}\Sigma(p),$$

仍然以 (5.44) 式的夸克自能图为例，经过维数正规化对发散的处理后，可以通过在拉氏量中加入一个对应的抵消项将其消除：

$$\dots + \Sigma(p)]\bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi + \dots$$

使得对传播子的  $\mathcal{O}(g^2)$  修正成为有限的，



$$= -i\not{p}\Sigma(p) + i\not{p}\Sigma(p) = 0.$$

这种加入的抵消项可以解释为对夸克波函数的重整，可以定义，

$$\psi_R = (1 + \Sigma(p^2))^{1/2} \psi$$

用  $\psi_R$  写下的拉氏量运动学部分具有原来的正则形式。

# 3 正规化和重整化

原则上讲通过这种正规化和重整化步骤，用抵消项的方法可以将所有的无穷大消除，但也并不是对任意过程的高阶发散都是适用的，譬如不能用这种方法将电荷  $e$  重整化为  $e_R$ ，因为电荷守恒是最基本的物理规则，不能被破坏的。例如在讨论光子和夸克对相互作用顶点的  $QCD$  修正中，若将光子场和费米子流的相互作用拉氏量加上抵消项，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= -eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow -eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - eV(q^2)A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\ &= -[1 + V(q^2)]eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.\end{aligned}$$

$V(q^2)$  是类似于  $\Sigma(p^2)$  的发散积分。注意到夸克自能图中引入抵消项后，描写夸克和光子相互作用的拉氏量部分变为，

$$\mathcal{L}_{q,\gamma} = [1 + \Sigma(p^2)]\bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi - [1 + V(q^2)]eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

若定义重整化的电荷，

$$e_R = e \frac{1 + V(q^2)}{1 + \Sigma(p^2)},$$

重整化的拉氏量为，

$$\mathcal{L}_R = \bar{\psi}_R i \cancel{\partial} \psi_R + e_R A_\mu \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R.$$

# 3 正规化和重整化

重整化的  $e_R$  就有可能破坏电荷的守恒。为保证重整化步骤和电荷守恒一致，就必须要求，

$$\frac{V(q^2)}{\Sigma(p^2)} \stackrel{q^2 \rightarrow 0}{=} 1.$$

这一关系式应该在微扰理论的所有阶都是成立的。这说明无穷大的消除并不是一种平庸的技巧，必须遵从理论的基本限制和一致性。幸运的是上面的等式可以被证明是成立的。可以在单圈图阶显式地计算出  $V(q^2)$  和  $\Sigma(p^2)$  的积分证明之。

# 3 正规化和重整化

---

现在我们可以将裸场量和耦合常数换成相应的重整化量，

$$\psi_{bare} = \sqrt{Z_2}\psi_R, \quad A_{bare}^\mu = \sqrt{Z_3}A_R^\mu, \quad g_{bare} = Z_g\mu^\epsilon g_R$$

这里引入了重整化的量纲参数  $\mu$ ，即重整化的标度，给出了  $g_{bare}$  的显式表示，如此就使得重整化的耦合常数  $g_R$  是无量纲的量。实际上当返回 4 维的时候耦合常数应该是没有量纲的量。

# 3 正规化和重整化

现在将拉氏量用重整化量（省略掉下角标  $R$ ）写出为，

$$\mathcal{L} = Z_2 \bar{\psi} \not{\partial} \psi - \frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} + Z_g Z_2 \sqrt{Z_3} \mu^\epsilon g \bar{\psi} \not{A} \psi \\ + (\text{规范固定项, 鬼项, } \dots)$$

通常为方便定义，

$$Z_1 = Z_g Z_2 \sqrt{Z_3}$$

如果进一步设定  $Z_i = 1 + \delta_i$ ，得到，

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} + \mu^\epsilon g \bar{\psi} \not{A} \psi + (\text{规范固定项, 鬼项, } \dots) \\ + \delta_2 \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{1}{4} \delta_3 F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} + \delta_1 \mu^\epsilon g \bar{\psi} \not{A} \psi$$

抵消项：要求单圈格林函数有限而确定

$$\text{夸克自能图} \Rightarrow \delta_2 = -C_F \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \right),$$

$$\text{胶子自能图} \Rightarrow \delta_3 = \left( \frac{5}{3} C_A - \frac{4}{3} n_f T_R \right) \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon},$$

$$\text{顶点修正} \Rightarrow \delta_1 = -(C_A + C_F) \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon}.$$

# 3 正规化和重整化

强耦合重整化常数 $Z_g$ 可计算得到:

$$Z_g = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} = 1 + \delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_3 = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} \left[ -\frac{11}{6}C_A + \frac{2}{3}n_f T_R \right]$$
$$\stackrel{def}{=} 1 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{b_0}{2} \right) \alpha_s.$$

注意到夸克自能图 ( $Z_2$ ) 和顶点修正 ( $Z_1$ ) 的阿贝尔部分的  $C_F$  互相抵消了, 这和电磁耦合在  $QCD$  非重整化时的情形是相同的, 反之顶点修正 ( $Z_1$ ) 的非阿贝尔部分对  $QCD$  耦合常数的重整化有贡献, 这是规范不变性的结果。非阿贝尔部分对自能和顶点各自的贡献并不是规范不变的, 对两者之和是规范不变的。重整化过程的一致性要求重整化的强耦合常数  $g$  对夸克胶子相互作用和胶子之间的相互作用是相同的, 否则  $q\bar{q} \rightarrow gg$  过程的规范不变性在单圈图阶就将不再成立。

# 3 正规化和重整化

重整化是作用在相连的费曼图顶点之和上的，不考虑这些图的外线及其自能部分。或者用更技术上的语言，它处理的是单粒子不可约 (one-particle-irreducible, 1PI) 格林函数  $G$ ，所谓不可约指的是这些图不可以通过切割一根内线而分开。可以引入一个截断能标  $\Lambda$  控制  $G$  在圈图动量积分中的紫外发散，图 5.6 是对 1PI 三胶子顶点有贡献的所有单圈图示意图。于是非重整化的格林函数可记

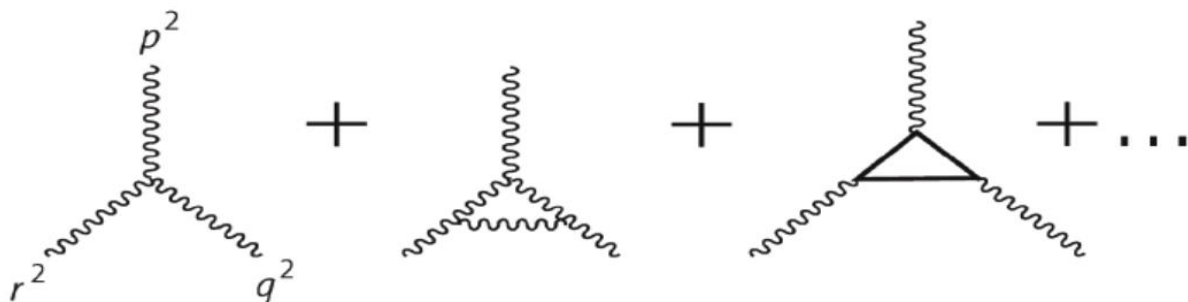


图 5.6: 对 1PI 三胶子顶点有贡献的所有单圈图示意图。

为  $G_U(p_i, \alpha_0, \Lambda^2)$ ,  $p_i$  是外线粒子的动量,  $\alpha_0$  是拉氏量中的理论顶点耦合常数。对一个可重整化的理论, 例如  $QED$  或  $QCD$ , 可以定义重整化的格林函数为,

$$G_U(p_i, \alpha_0, \Lambda^2) = Z_G G_{ren}(p_i, \alpha, \mu^2),$$

这里以  $\alpha$  代表  $QED$  或  $QCD$  的耦合常数。  $G_U$  不依赖于  $\mu$ , 因此有,

$$\frac{dG_U}{d \ln \mu^2} = \frac{d}{d \ln \mu^2} (Z_G G_{ren}) = 0,$$

# 3 正规化和重整化

即为,

$$Z_G \left( \frac{\partial}{\partial \ln \mu^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial \ln \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{Z_Q} \frac{\partial Z_G}{\partial \ln \mu^2} \right) G_{ren} = 0.$$

因此可将重整化方程写为,

$$\left( \frac{\partial}{\partial \ln \mu^2} + \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma_G(\alpha) \right) G_{ren} = 0.$$

这里,

$$\beta(\alpha) = \frac{\partial \alpha}{\partial \ln \mu^2}, \quad \gamma_G(\alpha) = \frac{\partial \ln Z_G}{\partial \ln \mu^2}.$$

$\beta(\alpha)$  并不依赖于所讨论的是哪个格林函数, 它只是理论和重整化方案的特征量, 而  $\gamma_G$  是依赖于格林函数的。严格地讲上面写出的重整化方程是针对朗道规范给出的 ( $\xi = 0$ ), 对别的规范, 应该包含一个有规范固定参数  $\xi$  或其变种项。这里为简单省略了这一项, 因为实际上它对单圈图阶是不相干的。



# 3 正规化和重整化

当我们将重整化方程应用于大能量标度  $Q$  的硬过程时，可以通过乘以适当的  $Q$  的阶数，将相应的格林函数变为无量纲量。因为这时对  $Q$  有兴趣的是它的对数依赖关系，我们可以引入变量  $t$  为，

$$t = \ln \frac{Q^2}{\mu^2}.$$

将  $G_{ren}$  写为  $G_{ren} \equiv F(x_i, \alpha, t)$ 。其中  $x_i$  是标度变量，在讨论中常常可以省去。在标度极限下  $F$  应该是和  $t$  无关的，直观也告诉我们质量为 0 的  $QCD$  是标度不变的。为得到对  $t$  的实际依赖关系，就应求解重整化方程，

$$\left( -\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma_G(\alpha) \right) G_{ren} = 0.$$

边界条件为  $t = 0$  (或者  $Q^2 = \mu^2$ )，也即为， $F(\alpha, 0)$ 。

# 4 跑动耦合常数 $\alpha_s$

♣ 在QCD中，物理可观测量的理论计算值都表示成依赖于耦合常数 $\alpha_s(\mu)$ 的表达式，而 $\alpha_s(\mu)$ 本身是重整化能标 $\mu$ 的函数。当我们取 $\mu$ 的值趋向于给定过程的动量转移尺度 $Q^2$ 的时候， $\alpha_s(\mu)$ 就是标志这个给定过程的强相互作用的有效耦合强度。

$\alpha_s$ 与重整化方案和过程无关，是重整化能标 $\mu$ 的函数

♣ QCD的耦合常数 $\alpha_s(\mu)$ 满足下面的重整化群方程：

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \alpha_s = \beta(\alpha_s) = -\frac{\beta_0}{4\pi} \alpha_s^2 - \frac{\beta_1}{(4\pi)^2} \alpha_s^3 - \dots$$

$\beta$ 函数前面的负号就是QCD理论渐进自由性质的来源，也就是强相互作用的耦合常数随着相互作用过程动量转移的增大而变弱。其它已知的相互作用都没有这个性质。 $\beta$ 函数目前理论上已经计算到4圈图的水平。

QCD的非阿贝尔相互作用性质，QED的 $\beta$ 函数：

$$\beta_{QED}(\alpha) = \frac{1}{3\pi} \alpha^2 + \dots,$$

# 4 跑动耦合常数 $\alpha_s$

♣ 例如1圈图和2圈图的结果分别是

$$\beta_0 = \frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} T_F N_f = (33 - 2N_f)/3,$$
$$\beta_1 = \frac{34}{3} C_A^2 - \frac{20}{3} C_A T_F N_f - 4 C_F T_F N_f,$$

其中 $N_f$ 是夸克味道数目， $T_F = 1/2$ 是SU(3)群生成元的归一化因子； $C_F$ ， $C_A$ 是SU(3)群的基础表示和伴随表示的卡西米算符，

$$C_F = \frac{\mathcal{N}_C^2 - 1}{2\mathcal{N}_C} = \frac{4}{3}, \quad C_A = \mathcal{N}_C = 3.$$

♣ 幸运的是目前标准模型只有三代，6种夸克味道。当 $N_f \geq 17$ 时， $\beta_0 < 0$ ，渐进自由性质就会消失。得到在单圈和双圈图近似下的 $\alpha_s(\mu)$ 的演化为

领头阶的跑到耦合常数

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)} + \dots,$$

次领头阶的跑到耦合常数

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)} \left[ 1 - \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \frac{\ln \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)^2}{\ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)} + \dots \right].$$

上式中的能标因子 $\Lambda_{\text{QCD}}$ 是作为演化方程(7.19)的边界条件引进的。对于不同的圈图近似和不同的能标下不同的夸克味道数目， $\Lambda_{\text{QCD}}$ 的数值都是不同的。

$\Lambda_{\text{QCD}}$ 对应的是耦合变为无穷大的能标

# 4 跑动耦合常数 $\alpha_s$

如果对于完全相同的 $\alpha_s(\mu^2)$ 值，两个 $\Lambda$ 之间关系：

$$\Lambda_1 = \left(\frac{b_0}{b'}\right)^{\frac{b'}{2b_0}} \Lambda_2 \stackrel{n_f=5}{\equiv} 1.148\Lambda_2.$$

很显然  $\Lambda$  作为  $QCD$  的基本参数可能会使人误入陷阱。首先  $\Lambda$  可以在领头阶或次领头阶定义，每种情况下  $\Lambda$  乘以一个常数也是一个可以接受的等价定义。现在几乎所有的精确  $QCD$  现象都要到次领头阶，因此 上面的式子 都可用以定义  $\Lambda$ ，被广泛应用于文献中。实践中  $\alpha_s$  通常是由实验测量给出的，因此当比较  $\Lambda$  的值时，一定要首先确认从耦合常数得到  $\Lambda$  时是否采用了完全相同的公式。从不同的约定给出的误差虽然不大，但也往往能和现在的测量误差相比较。

# 4 跑动耦合常数 $\alpha_s$

上述定义的另一个困难是  $\Lambda$  依赖于活跃的味数目。不同味道数给出的  $\Lambda$  值应满足  $\alpha_s$  在能标  $\mu = m$  处的连续性，这里  $m$  是重夸克的质量。表 5.1 给出了利计算得到的不同味道数领头阶 (LO) 和次领头阶 (NLO) 的耦合。正确的匹配方案应该是，对所有的动量值耦合常数必须既是重整化群的解又是一个连续的函数。

$\mu > m_b$  时有，

$$\alpha_s(\mu^2, 5) = \frac{1}{b_0(5) \ln(\mu^2/\Lambda(5)^2)} [1 - \dots].$$

对  $m_c < \mu < m_b$ ，耦合常数随 4 个活跃的味演化，正确的形式为，

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu^2, 4)} = \frac{b_0(4) \ln(\mu^2/\Lambda(5)^2)}{[1 - \dots]} + \text{常数}.$$

表 5.1: 当  $Q = 5\text{GeV}$   $\Lambda = 200\text{MeV}$  时  $\alpha_s(Q)$  的值

	味道数 = 4	味道数 = 5
LO	0.234	0.255
NLO	0.184	0.206

# 4 跑动耦合常数 $\alpha_s$

连续性条件:

$$\alpha_s(m_b, 4) = \alpha_s(m_b, 5). \quad (5.93)$$

利用 NLO 阶的  $\alpha_s(\mu^2)$  表达式可以证明,

$$\Lambda(4) \approx \Lambda(5) \left( \frac{m_b}{\Lambda(5)} \right)^{\frac{3}{25}} \left[ \ln \left( \frac{m_b^2}{\Lambda(5)^2} \right) \right]^{\frac{963}{14375}}. \quad (5.94)$$

图 5.7 给出了  $\Lambda(4)$  和  $\Lambda(5)$  的比较。因此在比较不同的  $\Lambda$  值时必须首先要知道设

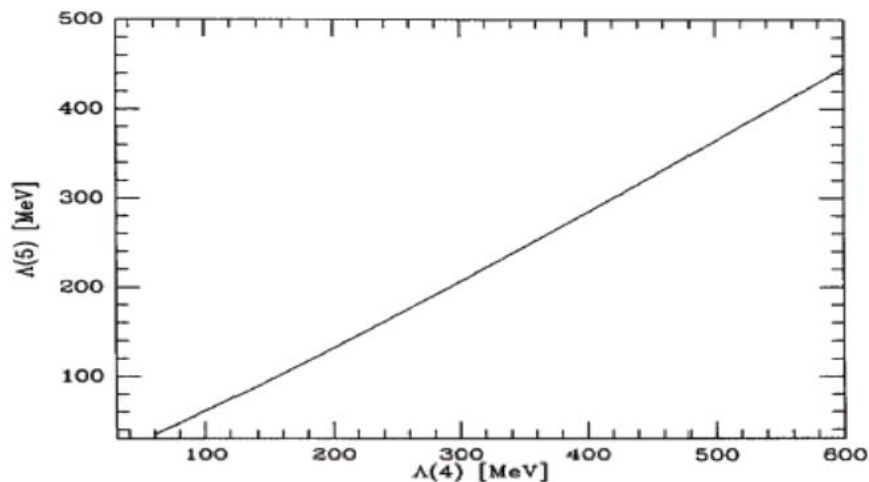


图 5.7: 轻夸克味道数为 4 和 5 的  $\Lambda$  值比较, 两者在  $m_b = 5 \text{ GeV}$  处匹配。

定的夸克味道数, 同时要清楚使用的是  $LO$  或  $NLO$  阶的表达式。

# 4 跑动耦合常数 $\alpha_s$

$\Lambda$  的第三个麻烦特性是，它依赖于重整化的方案。假定两个重整化常数计算都起始于完全相同的裸参数  $\alpha_s^0$ ,

$$\alpha_s^A = Z^A \alpha_s^0, \quad \alpha_s^B = Z^B \alpha_s^0.$$

重整化常数  $Z^A$  和  $Z^B$  中无穷大部分在微扰理论的所有阶都应该是相同的，因此两个重整化的耦合常数相互间只能相差一个有限的重整化因子。即，

$$\alpha_s^B = \alpha_s^A (1 + c_1 \alpha_s^A + \dots).$$

注意到  $\beta$  函数的系数因子  $b_0$  和  $b'$  对此变换是不变的，它们独立于重整化方案。可以证明 [1]，不同  $\Lambda$  定义之间的关系总是由单圈图计算给出的  $c_1$  值确定的，

$$\Lambda^B = \Lambda^A \exp\left(\frac{c_1}{2b_0}\right).$$

# 4 跑动耦合常数 $\alpha_s$

前面已经讲到，在最小减除重整化方案  $MS$  中仅减除  $\frac{1}{\epsilon}$  的极点，而在改进的最小减除重整化方案  $\overline{MS}$  中减除的是  $\frac{1}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma_\epsilon$ ， $\gamma_\epsilon$  是欧拉常数。利用公式可证，

$$\Lambda_{\overline{MS}}^2 = \Lambda_{MS}^2 \exp(\ln(4\pi) - \gamma_\epsilon).$$

为方便我们在这里给出  $n_f = 6, 5, 4, 3$  的  $\Lambda_{\overline{MS}}$  最新世界平均值如下，见于 [9] 的量子色动力学部分 (9. Quantum Chromodynamics):

$$\begin{aligned}\Lambda_{\overline{MS}}^{(6)} &= (89 \pm 6) MeV, \\ \Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} &= (210 \pm 14) MeV, \\ \Lambda_{\overline{MS}}^{(4)} &= (292 \pm 16) MeV, \\ \Lambda_{\overline{MS}}^{(3)} &= (332 \pm 17) MeV.\end{aligned}$$



# 4 跑动耦合常数 $\alpha_s$

实际应用中强耦合常数的数值通常是在一个特定的参考能标点给出的，比如说  $Q^2 = M_Z^2$ ，求解 (5.81) 式就可以求出强耦合常数在任意别的能标点的值，

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(M_Z^2)}{1 + b_0 \alpha_s(M_Z^2) \ln \frac{Q^2}{M_Z^2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2)}.$$

包含高阶的  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  项的表达式可见相关文献，如 [1]。7.3.9 是目前我们了解的  $\alpha_s$  跑动。由于 *Tevatron* 和 *LHC* 的实验结果，确定  $\alpha_s$  的能标现在已经拓展到了 1 TeV 以上。

# 4 跑动耦合常数 $\alpha_s$

♣ 所以人们更常用的是 $\alpha_s$ 在一定能标的数值，一般是在Z玻色子的质量尺度来定义。目前最新的世界测量平均值是[1]:

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0.1185 \pm 0.0006. \quad (7.)$$

这是综合了不同能量点、不同方法的测量值得到的平均值。

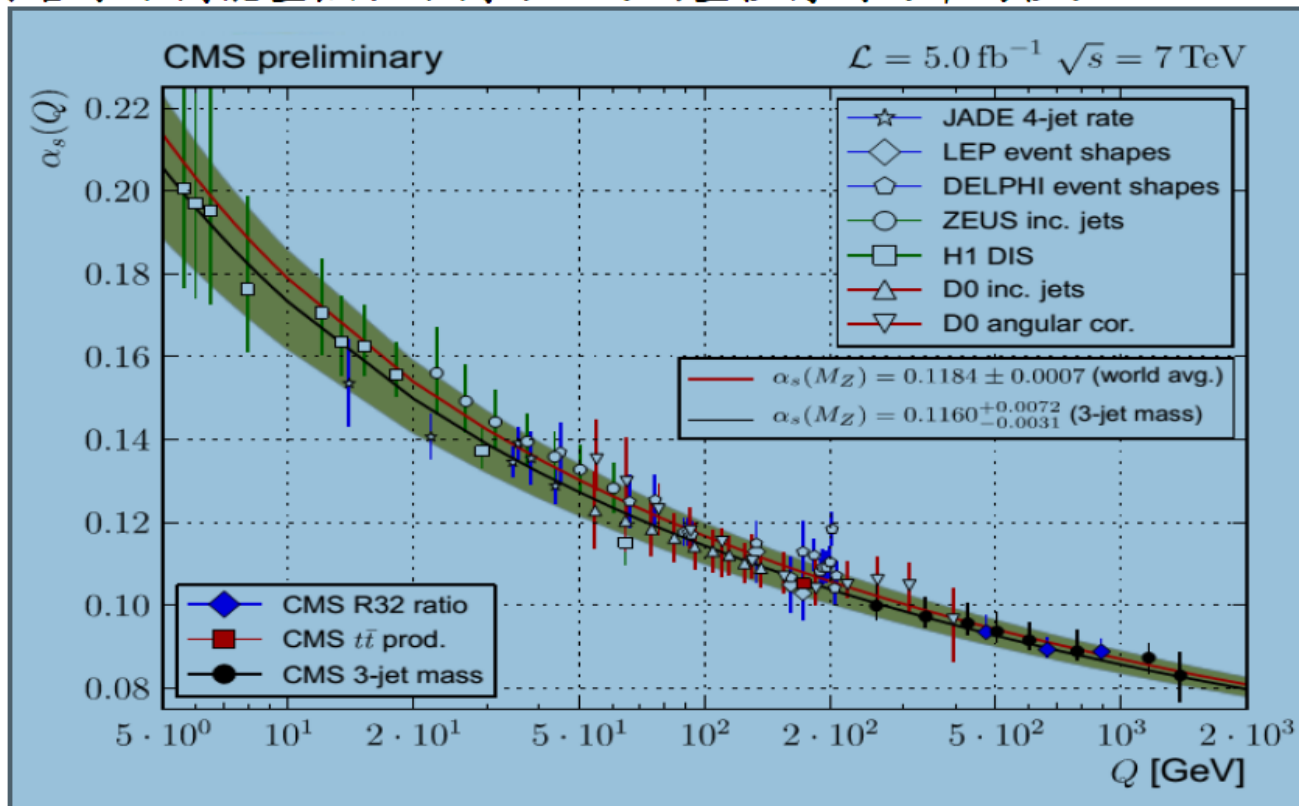


Figure: 7.3 CMS 等国际合作组在一个很宽的能区内对强相互作用耦合常数 $\alpha_s(Q^2)$ 随 $Q^2$ 演化的最新实验测量结果[90]。

# 4 跑动耦合常数 $\alpha_s$

♣ 在LHC实验中，可以通过对“Jets”的测量和研究来测量强相互作用耦合常数 $\alpha_s(Q^2)$ 的数值及其随能标 $Q^2$ 的演化。在每一个能量点上，LHC的实验测量精度当然不如正负电子对撞机实验。但LHC的优势在于它覆盖了 $Q^2$ 很宽的能区：从 $\sim 1$  GeV 到 $\sim 2000$  GeV。从图-7.3中 $\alpha_s(Q^2)$ 随能标的变化可以清楚地看出在以前的实验无法达到的高 $Q^2$ 区域， $\alpha_s(Q^2)$ 仍然具有渐进自由性质。

$$\alpha_s(M_Z^2) = \begin{cases} 0.1160 \pm 0.0031, & \text{CMS Comb. 2014,} \\ 0.1184 \pm 0.0007, & \text{World Comb. 2014,} \end{cases} \quad (7.26)$$

♣ 在过去的30年中，描写强相互作用的 $SU(3)_C$ QCD理论不断发展，已成为被广泛接受的成熟理论。微扰QCD的计算目前已作的相当好， $\alpha_s(\mu^2 = Q^2)$ 随能标 $\mu$ 的跑动已得到实验证实。但在非微扰区，尽管非微扰QCD研究也取得了很大进步，但强相互作用的计算或估算仍然比较困难。

♣ 由于强相互作用的禁闭效应，夸克和胶子总是被束缚在很小的费米尺度范围内，很难被实验研究，QCD真空的性质一直没有实验的直接数据。粒子物理学中一个重要的研究方向—相对论性重离子碰撞就是研究QCD真空的性质。首先是把原子电离成重离子，然后用高能加速器加速后实现原子核与原子核的高速碰撞。每个核子的能量都超过10GeV以上，这样在碰撞时就完全不同于通常的核子核子碰撞。首先，是单次碰撞中的多粒子产生现象。其次是在不太小的有限体积内的高温高密度状态。而核子核子碰撞时，涉及的体积很小，只能观察到粒子的相互作用和反应。

# 5. 重整化群的不变性

前面看到耦合常数  $\alpha_s$  依赖于非物理的重整化能标  $\mu$ ，这并无大碍，因为耦合常数本身并不是可观测量。物理上所观测的是衰变几率、谱形或截面等。它们由耦合常数和一些矩阵元的乘积给出。一般地讲，假定一个无量纲的物理量  $A$  是标度量  $Q$  的函数，无量纲的量本身应该是和  $Q$  无关的，但在量子场论中则并非如此，而且矩阵元在重整化过程中还引入了第二个能标  $\mu$ ， $\mu$  的选取完全是任意的。物理可观测量直到可以计算的任意阶都应该是和  $\mu$  无关的，因此对任意可观测量  $A$  可以写下重整化方程，

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} A \left( \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right) = 0,$$

即为，

$$\begin{aligned} & \left[ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] A \left( \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right) \\ &= \left[ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] A \left( \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right) = 0. \\ & \alpha_s = \alpha_s(\mu^2), \quad \beta(\alpha_s) = \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} = \frac{\partial \alpha_s}{\partial \ln \mu^2}. \end{aligned}$$

$\beta$  函数的定义和之前 (5.75) 式中给出的形式是相同的。

# 5.重整化群的不变性

作为一个例子让我们来讨论  $R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{强子})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ ,

$$R = 3 \sum_f Q_f^2 \cdot R_c \left( \frac{s}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right).$$

其中前面的因子  $3 \sum_f Q_f^2$  来自夸夸模型的树图阶。

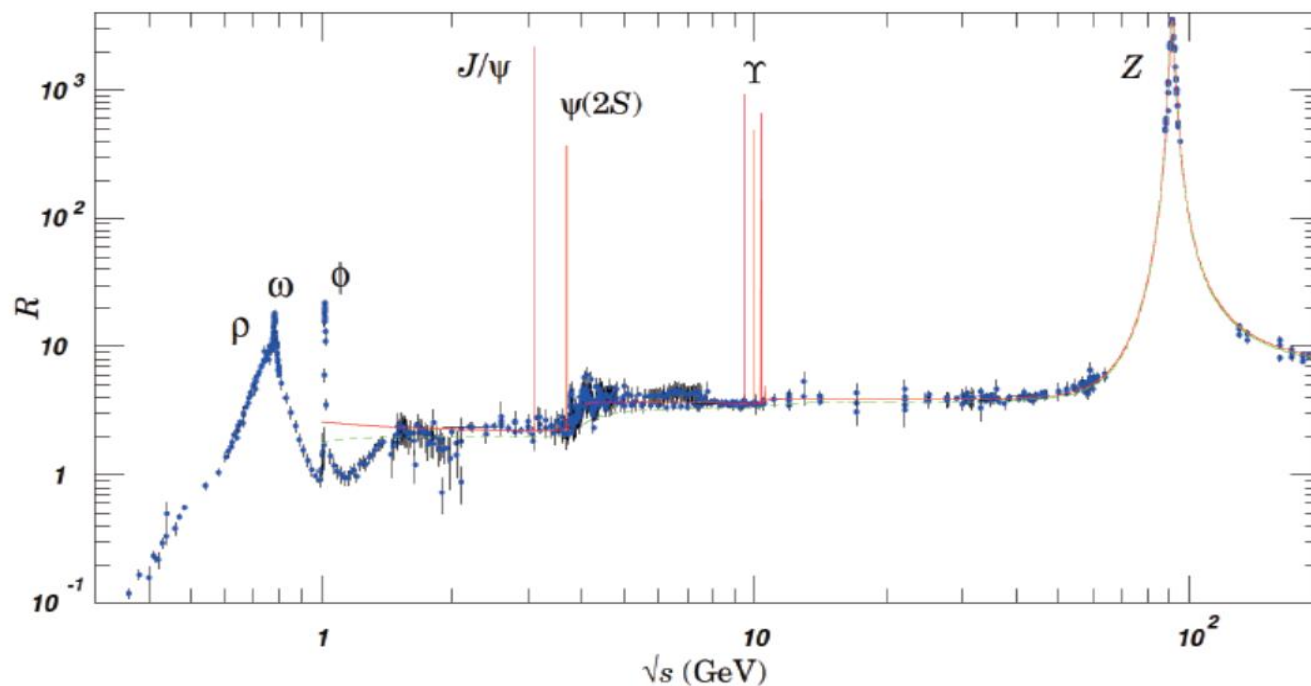


图 5.10:  $R$  值的测量结果 [11]。

# 5.重整化群的不变性

由于对  $R(s)$  的测量精度达到了很高的精度，因此就应该包括对它的小量  $\alpha_s$  修正效应。在  $QCD$  微扰计算中可将  $R_c$  展开为重整化的耦合常数  $\alpha_s(\mu^2)$  的级数，记  $r = s/\mu^2$ ，可以写为：

$$R_c(r, \alpha_s(\mu^2)) = 1 + \alpha_s f_1(r) + \alpha_s^2 f_2(r) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_s^n f_n(r),$$

$R_c$  对  $\mu$  的函数关系包含在函数  $f_n(r)$  中，同时也隐含在  $\alpha_s$  中。因此有，

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} R_c = 0 \implies \left[ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] R_c(r, \alpha_s) = 0.$$

在给出方程的一般形式解之前，先来看一下如何基于 上 式的微扰论展开直接求出它们，

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} R_c = 0 \implies & \beta(\alpha_s) f_1(r) + \alpha_s \mu^2 \frac{df_1}{d\mu^2} + \\ & 2\alpha_s \beta(\alpha_s) f_2(r) + \alpha_s^2 \mu^2 \frac{df_2}{d\mu^2} + \dots \end{aligned}$$

# 5.重整化群的不变性

在  $\alpha_s$  阶，考虑到在前面已经给出的  $\beta$  函数是  $\alpha_s^2$  阶的，因此有，

$$\frac{df_1}{d\mu^2} = 0 \implies f_1 = \text{常数} \equiv a_1.$$

这个结果告诉我们在单圈图  $R_c$  的值是有限的，所有的紫外无穷大都被消除了，没有电荷的重整化，因为它们若没有被消除那么  $f_1$  就会是  $\mu$  的显函数。正如我们在前面讲过的那样，这是电荷不可重整化的必然结果。再来看  $\alpha_s^2$  阶，

$$\beta(\alpha_s)f_1(r) + \alpha_s^2 \frac{df_2}{d \ln \mu^2} = 0 \implies f_2 = b_0 a_1 \ln \frac{\mu^2}{s} + a_2 (\text{积分常数}).$$

于是到  $\alpha_s^2$  阶我们有，

$$R_c = 1 + \underbrace{a_1 \alpha_s}_{\text{单圈图}} + \underbrace{a_1 b_0 \alpha_s^2 \ln \frac{\mu^2}{s} + a_2 \alpha_s^2}_{\text{双圈图}} + \dots$$

注意到重整化群不变性的要求使我们不需进行具体的双圈图计算就可以知道双圈图对数项的系数。在  $s \rightarrow \infty$  时，双圈图对数项的贡献变得非常大，当  $\ln(s/\mu^2) \gtrsim 1/(b_0 \alpha_s)$  时该项的值和  $\alpha_s$  阶相当。容易证明，重整化标度的不变性要求这种对数形式存在于微扰论的所有阶：

$$f_n(r) = a_1 \left[ b_0 \ln \frac{\mu^2}{s} \right]^n + \dots$$

# 5.重整化群的不变性

因此可将  $R_c$  整理为,

$$\begin{aligned} R_c &= 1 + a_1 \alpha_s \left[ 1 + \alpha_s b_0 \ln \frac{\mu^2}{s} + \left( \alpha_s b_0 \ln \frac{\mu^2}{s} \right)^2 + \dots \right] + a_2 \alpha_s^2 + \dots \\ &= 1 + a_1 \frac{\alpha_s(\mu)}{1 + \alpha_s(\mu) b_0 \ln \frac{s}{\mu^2}} + a_2 \alpha_s^2 + \dots \\ &\equiv 1 + a_1 \alpha_s(s) + a_2 \alpha_s^2 + \dots, \end{aligned}$$

这里利用了关系式,

$$\frac{\alpha_s(\mu)}{1 + \alpha_s(\mu) b_0 \ln \frac{s}{\mu^2}} = \frac{1}{b_0 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} + b_0 \ln \frac{s}{\mu^2}} = \frac{1}{b_0 \ln \frac{s}{\Lambda^2}} \equiv \alpha_s(s).$$

重整化群不变性限定了高阶修正的形式。高阶的所有对数项由低阶的有限项系数确定。将所有项加在一起的时候只需将  $\alpha_s$  的能标设在  $s$ 。于是最后有,

$$R_c = 1 + a_1 \left( \frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right) + a_2 \left( \frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right)^2 + a_3 \left( \frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right)^3 + \dots$$

当然  $a_1, a_2 \dots$  的值必需由具体的计算得到。现在级数在  $n$  阶的截断真正具有  $\alpha_s^{n+1}$  次方的精度, 不再像之前那样高阶项和低阶项有大致相同的大小。具体的计算已经给出了到  $a_4$  的系数值, 见 [9] 及那里的参考文献。



# 6. 软胶子辐射

---

胶子从费米子上的软辐射在末态演化中具有根本性的影响。它的辐射几率很大，辐射谱正比于  $dE/E$ ，类似于  $QED$  中的韧致辐射，导致末态强子多重数的增加。由于它们的耦合比较简单，软胶子辐射的讨论并不复杂。所谓软就是指波长比较长，软胶子对超短距离动力学机制的细节不敏感，不能区分在小于波长的时间点上所发生的相互作用的性质，对夸克的自旋也不敏感，其唯一的特性是对色荷敏感。

# 6. 软胶子辐射

以图 5.11所示从虚光子衰变末态  $q\bar{q}$  上辐射的软胶子为例，辐射振幅

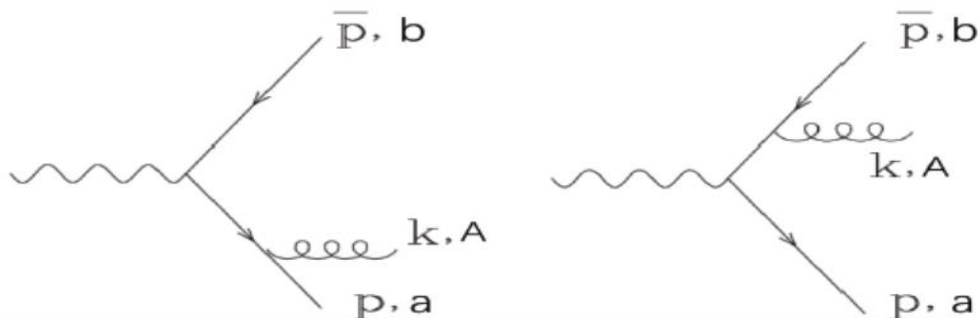


图 5.11: 虚光子衰变末态  $q\bar{q}$  上软胶子辐射的示意图。

可写为，

$$\begin{aligned}
 A_{soft} &= \bar{u}(p)\epsilon(k)(ig)\frac{-i}{\not{p}-\not{k}}\Gamma^\mu v(\bar{p})\lambda_{ab}^A + \bar{u}(p)\Gamma^\mu\frac{-i}{\not{p}-\not{k}}(ig)\epsilon(k)v(\bar{p})\lambda_{ab}^A \\
 &= \left[ \frac{g}{2p\cdot k}\bar{u}(p)\epsilon(k)(\not{p}+\not{k})\Gamma^\mu v(\bar{p}) - \frac{g}{2\bar{p}\cdot k}\bar{u}(p)\Gamma^\mu(\not{p}+\not{k})\epsilon(k)v(\bar{p}) \right] \lambda_{ab}^A.
 \end{aligned}$$

这里用  $\Gamma^\mu$  表示夸克和光子的耦合顶点 ( $-ie\gamma^\mu$ ) 是要强调下面的计算和  $\Gamma^\mu$  的具体形式无关，它可以是任何一个复杂的顶点形状因子。 $\epsilon(k)$  是光子的极化矢量，对实光子可表示为：

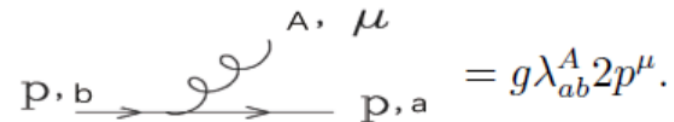
$$\epsilon_{L,R}^\mu = (0; 1, \pm i, 0)/\sqrt{2}.$$

# 6. 软胶子辐射

根据定义应有  $k \ll p, \bar{p}$ , 因此可忽略分子上的  $k$ , 根据狄拉克方程可得,

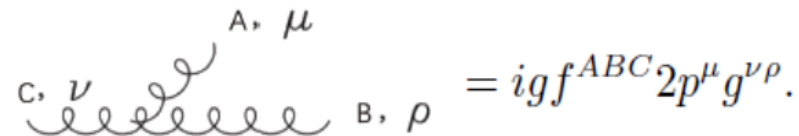
$$A_{soft} = g\lambda_{ab}^A \left( \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} - \frac{\bar{p} \cdot \epsilon}{\bar{p} \cdot k} \right) A_{born}.$$

软胶子的发射被因式化为一个辐射因子的乘积再乘以玻恩振幅。据此可以导出夸克软胶子辐射的一般费曼规则,



$$p, b \rightarrow \text{gluon}(A, \mu) \rightarrow p, a = g\lambda_{ab}^A 2p^\mu.$$

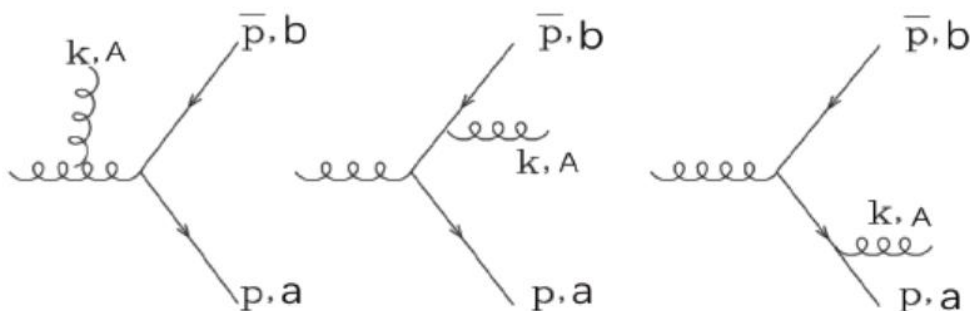
类似的也可以导出  $g \rightarrow gg$  软胶子辐射的费曼规则,



$$p, \nu \rightarrow \text{gluon}(A, \mu) \rightarrow p, \rho = igf^{ABC} 2p^\mu g^{\nu\rho}.$$

# 6. 软胶子辐射

作为一个例子来讨论虚的  $g$  到夸克对过程的软胶子修正。和电弱衰变相比这时应该增加一个  $g \rightarrow gg$  的图，这时的夸克对也不再是色单态，因此会变得少许复杂些。



$$\begin{aligned}
 &\stackrel{k \rightarrow 0}{=} \left[ igf^{ABC} \lambda_{ab}^C \left( \frac{Q\epsilon}{Qk} \right) + g(\lambda^B \lambda^A)_{ab} \left( \frac{p\epsilon}{pk} \right) - g(\lambda^A \lambda^B)_{ab} \left( \frac{\bar{p}\epsilon}{\bar{p}k} \right) \right] A_{born} \\
 &= g(\lambda^A \lambda^B)_{ab} \left[ \frac{Q\epsilon}{Qk} - \frac{\bar{p}\epsilon}{\bar{p}k} \right] + g(\lambda^B \lambda^A)_{ab} \left[ \frac{p\epsilon}{pk} - \frac{Q\epsilon}{Qk} \right].
 \end{aligned}$$

# 6. 软胶子辐射

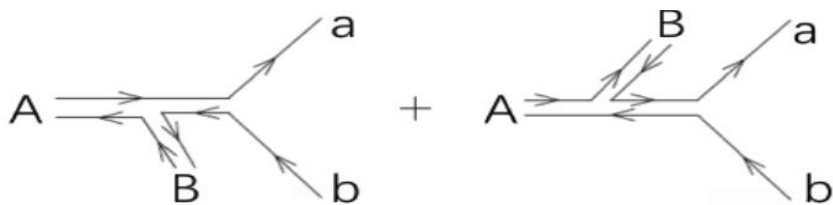


图 5.12: 虚胶子衰变到  $q\bar{q}$  软胶子辐射过程的色荷流程示意图。

上式中的两项对应于图 5.12 所示的色荷流程图。左图中色荷标记为  $b$  的反夸克连接带色荷标记为  $B$  的软胶子，而色荷标记为  $a$  的夸克直接连接到携带色荷标记为  $A$  的衰变胶子。右图中夸克和反夸克倒了过来。这两种情况分别代表了软胶子从反夸克和夸克上的辐射，在  $k \rightarrow 0$  的近视下忽略了软胶子从胶子上的辐射。当取总振幅和的平方时需要对所有初末态的色荷求和，每个单项的平方和干涉项的色因子分别由下式给出，

$$\sum_{A,B,a,b} |(\lambda^A \lambda^B)_{ab}|^2 = \sum_{A,B} \text{Tr}(\lambda^A \lambda^B \lambda^B \lambda^A) = \frac{N^2 - 1}{2} C_F = \mathcal{O}(N^3), \quad (5.122)$$

$$\begin{aligned} \sum_{A,B,a,b} (\lambda^A \lambda^B)_{ab} [(\lambda^B \lambda^A)_{ab}]^* &= \sum_{A,B} \text{Tr}(\lambda^A \lambda^B \lambda^A \lambda^B) = \frac{N^2 - 1}{2} (C_F - \frac{C_A}{2}) \\ &= \frac{N^2 - 1}{2} (-\frac{1}{2N}) = \mathcal{O}(N). \end{aligned} \quad (5.123)$$

两项的干涉相对于每个单项的平方有一个  $1/N^2$  的压制，因此到  $1/N^2$  的领头阶，软胶子的辐射可以看作是两个色流辐射过程的不相干之和。

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

三喷注事例是 1979 年夏在德国汉堡的  $e^+e^-$  对撞机 PETRA 上发现的。PETRA 对撞机的最高质心系能量为  $\sqrt{s} = 46\text{GeV}$ ，它有四个实验组：MARK-J, JADE, PLUTO, TASSO。

我们知道  $e^+e^-$  对撞机在较低能量下的两喷注事例主要来自于  $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}$  过程  $q$  和  $\bar{q}$  的碎裂，末态的两喷注基本上是背对背的。喷注中的强子存在于以对撞点为顶点的一个锥体内，强子相对于夸克飞行方向的平均横动量  $p_T \simeq 0.3 - 0.4\text{GeV}$ ，基本满足高斯分布，不随质心系能量改变，锥体半顶角的平均大小可以估计为，

$$\langle \delta \rangle \simeq \left\langle \frac{p_T}{p_L} \right\rangle \simeq \frac{\langle p_T \rangle}{\sqrt{s} / \langle n \rangle},$$

这里  $p_L$  是强子的纵向动量。 $\langle n \rangle$  是粒子平均多重数，它随质心系能量  $\sqrt{s}$  的变化缓慢，所以，

$$\langle \delta \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{s}},$$

$\sqrt{s}$  增大时喷注会变窄。但是 PETRA 实验发现当对撞机的能量  $\sqrt{s} > 7.4\text{GeV}$  以后，强子事例横动量  $p_T$  的分布比按照两喷注计算得到的要宽，暗示有第三个喷注的产生。

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

## 正负电子对撞的强子喷注事例

为描写强子喷注事例，可以对事例定义归一化的动量张量，

$$\mathcal{M}_{ab} = \frac{\sum_i p_{ia} p_{ib}}{\sum_i p_i^2},$$

这里  $a$  和  $b$  是三个空间方向的指标， $i$  是末态的粒子数指标。 $\mathcal{M}_{ab}$  是一个可对角化的对称矩阵，可记它的归一化本征矢为  $n_1, n_2, n_3$ ，相应的本征值为  $Q_1, Q_2, Q_3$ ，要求排序为  $0 \leq Q_1 \leq Q_2 \leq Q_3$ ， $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1$

$$Q_1 = \frac{\sum_i (p_i \cdot n_1)^2}{\sum_i p_i^2},$$

$$Q_2 = \frac{\sum_i (p_i \cdot n_2)^2}{\sum_i p_i^2},$$

$$Q_3 = \frac{\sum_i (p_i \cdot n_3)^2}{\sum_i p_i^2}.$$

若定义  $n_2$  和  $n_3$  为事例平面，考查事例的物理图像， $Q_1$  反映了事例的扁平度， $Q_2$  反映事例的宽度， $Q_3$  则反映了事例的长度。

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

利用上面的公式可以定义若干反映事例特征的重要物理量。先看球度  $S$  的定义，

$$S = \frac{3}{2}(Q_1 + Q_2) = \frac{3}{2}(1 - Q_3),$$

在实际的数据重建和物理分析中，可以通过计算机搜寻一个最佳的方向，使得下式取极小值，

$$S = \frac{3}{2} \min \left( \frac{\sum_i p_{Ti}^2}{\sum_i p_i^2} \right) = \frac{3}{2} \min \left[ \frac{\sum_i (p_{1i}^2 + p_{2i}^2)}{\sum_i p_i^2} \right].$$

使上式取极小值的坐标轴称为球度轴， $p_{Ti}$  是  $i$  粒子垂直于该轴的横动量。 $0 \leq S \leq 1$ ， $S \sim 1$  的事例是球形的，而  $S \ll 1$  的是雪茄形的背对背事例。图 5.17 显示的是 TASSO 组的实验结果，反映随着能量的增加，事例球度分布的峰位趋于更小的值，更似两喷注事例。

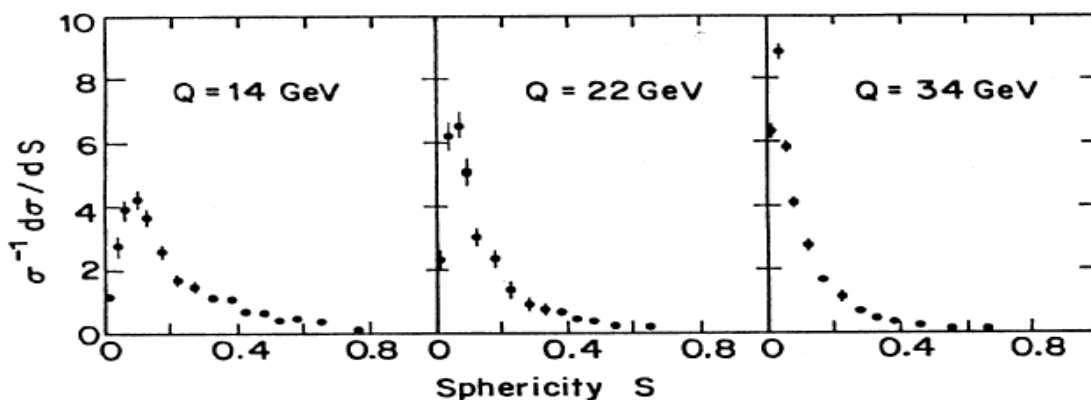


图 5.17: 球度分布的峰位随能量增加趋于更小的值 (TASSO 实验数据)



# 7. 三喷注物理及胶子的发现

---

使用  $Q_1$  可以定义一个归一化的非共面度  $A$ ,

$$A = \frac{3}{2}Q_1,$$

$A$  的取值区间为  $0 \leq A \leq 1/2$ 。共面事例（包括共线事例）的  $A$  比较小。

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

以用  $S$  和  $A$  对一些典型的事例特征给出直观的描述，

1. 大致为球形（各向同性）的事例， $Q_1 \approx Q_2 \approx Q_3$ ， $S \sim 1$ ， $A$  比较大。
2. 饼状的平面事例， $Q_1 \ll Q_2$ ， $S \neq 0$ ， $A \sim 0$ 。
3. 雪茄型的共线事例， $Q_2 \ll Q_3$ ， $S \sim 0$ ， $A \sim 0$ 。

事例分布也可以画在一个两维的散点图上，如图 5.18 所示，横坐标是球度  $S$ ，纵坐标的定义为，

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2}(Q_2 - Q_1).$$

图中标示了非公面度  $A$ 。这是一个直角三角形，平面事例，两喷注事例和各向同性球形事例的分布位置示于图中，中间的事例大多是非共面事例。

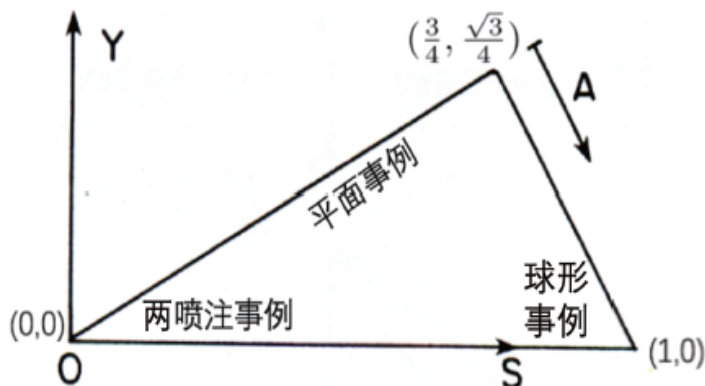


图 5.18: 在  $(S, Y)$  平面上的三角形物理区域

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

另外两个描写事例特征的重要物理量是冲度  $T$  和扁度  $A'$ ,

$$T = \max \left( \frac{\sum_i |\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}|}{\sum_i |\mathbf{p}_i|} \right),$$
$$A' = 4 \min \left( \frac{\sum_i |\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}'|}{\sum_i |\mathbf{p}_i|} \right)^2.$$

这里  $\hat{\mathbf{n}}$  是使  $T$  取极大值的单位矢量, 它定义了冲度轴;  $\hat{\mathbf{n}}'$  使得  $A'$  取极小值。通过前面的讨论, 我们知道微扰  $QCD$  导致喷注的产生。 $QCD$  的胶子辐射是一种共线效应, 对喷注的预言基于横动量限定的部分子碎裂, 没有考虑非微扰的碎裂效应, 因此理论预期和实验测量之间可能会有一定的误差。冲度  $T$  的优点在于它使用粒子动量的线性和来定义, 对胶子辐射的共线劈裂效应更稳定, 避免了夸克胶子水平上的奇异点, 而且对碎裂机制不敏感。 $T$  和  $A'$  的取值区间为,

$$\frac{1}{2} \leq T \leq 1, \quad 0 \leq A' \leq 1.$$

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

冲度轴通常用来定义两喷注事例的喷注轴，以测量其角分布，而垂直于  $\hat{n}'$  的平面则是用来定义事例平面的另外一种方法。图 5.19 显示随着能量的增加冲度的分布变得越来越窄。

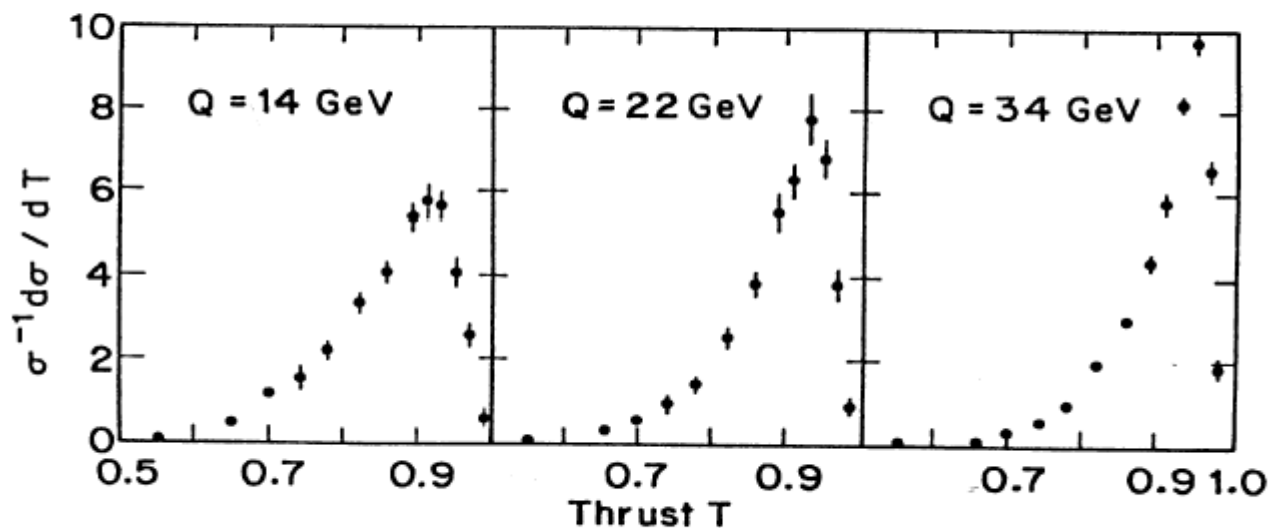


图 5.19: 冲度分布随着能量增加峰位趋于更大的值 (TASSO 实验数据)

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

PETRA 对撞机上的 MARK-J 组发明了描写喷注的能流方法，在三个相互垂直的方向  $e_1 \perp e_2 \perp e_3$  上定义了冲度，长轴量和短轴量。通过探测器的强子量能器各个单元内测量到的能量沉积定义能流矢量  $E$ ，矢量的方向从对撞点到强子量能器的单元。使用能流定义冲度  $T$  为，

$$T = \max \left( \frac{\sum_i |\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_1|}{\sum_i |\mathbf{E}_i|} \right),$$

这里  $e_1$  是使上式取得极大值的单位空间矢量。在和  $e_1$  垂直的平面上定义事例的长轴量和短轴量，

$$\begin{aligned} \text{长轴量} &= \max \left( \frac{\sum_i |\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_2|}{\sum_i |\mathbf{E}_i|} \right), \\ \text{短轴量} &= \min \left( \frac{\sum_i |\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_3|}{\sum_i |\mathbf{E}_i|} \right). \end{aligned}$$

定义扁度  $A'$  为，

$$A' = \text{长轴量} - \text{短轴量}.$$

MARK - J 合作组根据自己探测器的具体性能选择这种方法同样做出了精彩的物理分析结果。

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

## 三喷注

三喷注事例  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  阶的  $QCD$  子过程为,

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g.$$

末态的部分子要求有足够的能量和相互分开的角度。图 5.20是在垂直于束流的横平面上三喷注事例的典型图像。动量守恒要求三喷注事例是共面的。当任意两个

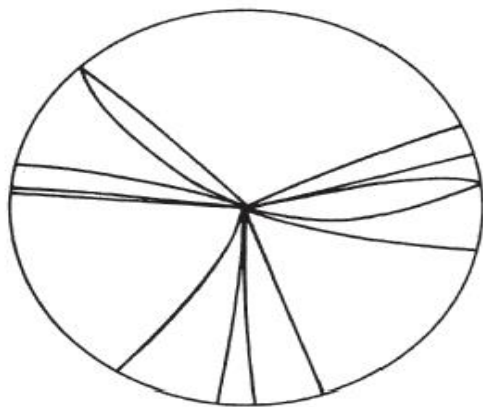


图 5.20: 三喷注事例在垂直于束流横平面上的典型图像 (TASSO。)

喷注间的角度较小, 或某一喷注的能量太低时, 无论是实验或理论方面区分两喷注和三喷注事例都存在着不确定性。

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

图 5.21 是到  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  阶的  $QCD$  耦合费曼图。(a) 是零阶图, (b) 和 (c) 是  $\alpha_s$  阶的  $q\bar{q}g$  态, (a) 和 (d), (e), (f) 的干涉给出对  $q\bar{q}$  态的  $\alpha_s$  阶贡献。两夸克末态的零阶截面为,

$$\sigma_0(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = 3e_q^2 \left( \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \right),$$

这里  $e_q$  是夸克的电荷, 3 是颜色因子。

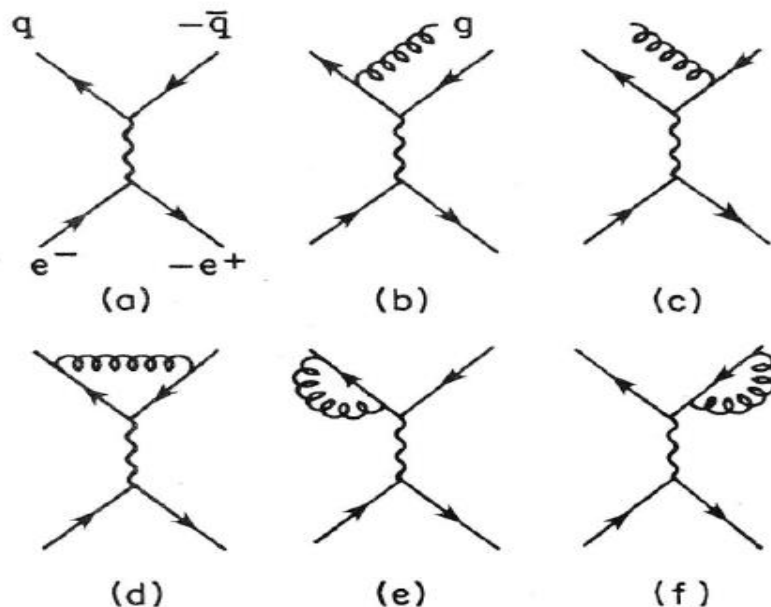


图 5.21:  $e^+e^-$  对撞中强子截面的  $\alpha_s$  阶费曼图。

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

三喷注事例的微分截面如在下面的辐射谱中所讨论的那样，会有软胶子引起的红外发散和  $q$  与  $\bar{q}$  共线的质量奇点发散，但是在积分截面中零阶图 (a) 和 (d)，(e)，(f) 图干涉效应的贡献将抵消无穷大发散，使得  $\sigma(q\bar{q}) + \sigma(q\bar{q}g)$  是有限的，

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) + \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g) = \sigma_0(1 + \alpha_s(\sqrt{s})/\pi).$$

埃利斯 (John Ellis) 和盖拉德 (Mary Gaillard) 等人计算了  $q\bar{q}g$  过程的辐射谱，如图 5.22 所示，记  $x_i = E_i/E_b$ ， $E_b$  代表束流的能量， $\sum_{i=1}^3 x_i = 2$ ，记  $x_q \equiv T$ ，则有，

$$\frac{1}{\sigma_{q\bar{q}}} \frac{d\sigma(q\bar{q}g)}{dx_q dx_{\bar{q}}} = \frac{2\alpha_s}{3\pi} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})} = \frac{2\alpha_s}{3\pi} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-T)(T-1+x_g)},$$

$T \rightarrow 1$  是辐射谱的奇点，图 5.22 中当  $\theta$  角很小时， $x_g \ll 1$ ， $T \rightarrow 1$  (即  $x_q \rightarrow 1$ ) 故称为共线奇点或共线发散，上式可以化为，

$$\frac{1}{\sigma_{q\bar{q}}} \frac{d\sigma(q\bar{q}g)}{dx_q dx_{\bar{q}}} \simeq \frac{4\alpha_s}{3\pi} \frac{1}{1-T} \frac{E_b}{E_g},$$

$E_g \rightarrow 0$  是软胶子的奇点，引起红外发射。

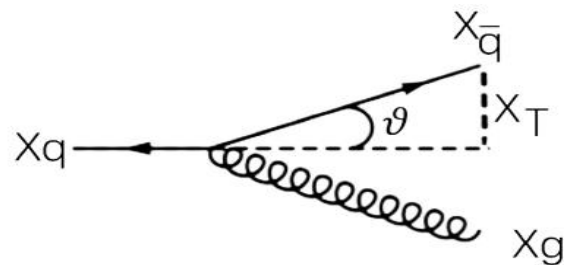


图 5.22: 三喷注能量示意图。



# 7. 三喷注物理及胶子的发现

还可以求得  $q\bar{q}g$  过程的横动量谱,

$$\frac{1}{\sigma_{q\bar{q}}} \frac{d\sigma(q\bar{q}g)}{dx_T} = \frac{1}{\sigma_{q\bar{q}}} \int dT \frac{d\sigma(q\bar{q}g)}{dx_T dT},$$

这里

$$x_T = x_{\bar{q}} \sin \theta.$$

该横动量谱当  $x_T \rightarrow 0$  时发散, 但是可以证明  $x_T$  的平均  $n$  阶矩并不发散

$$\langle x_T^n \rangle = \frac{1}{\sigma_{q\bar{q}}} \int dx_T \int dT x_T^n \frac{d\sigma(q\bar{q}g)}{dT dx_T} = \alpha_s(E) \cdot f(x_q, x_{\bar{q}}),$$

即,

$$\langle x_T^n \rangle \sim \alpha_s(E) \sim 1/\ln E^2,$$

并可求得,

$$\langle p_T \rangle \sim E/\ln E^2, \quad \langle p_T^2 \rangle \sim E^2/\ln E^2.$$

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

实验上获得干净的三喷注事例样本后，就可以与理论的预言相比较，以对理论进行检验或研究一些特定的物理，诸如  $\alpha_s$  随能量的变化或胶子的自旋等。这种比较有时需要蒙特卡洛的碎裂计算，但很多情况下我们希望这种比较不受碎裂偏差的影响，只在夸克胶子水平上检验理论的正确性，这就希望尽可能的通过对碎裂不灵敏的物理量的测量实现之。能量加权角关联的不对称性就是这样一个对碎裂不灵敏的物理量。从实验物理学家的角度，能量加权角关联的定义可写为下式，

$$f(\theta) = \frac{1}{\Delta\theta} \frac{1}{N} \sum_{a,b} x_a x_b \delta(\theta_{ab} - \theta),$$

上式的求和是对事例的所有粒子， $\Delta\theta$  是  $\theta$  角测量的取值区间， $\delta$  函数保证了事例中任意两个粒子之间的夹角  $\theta_{ab}$  在  $\theta \pm \Delta\theta/2$  内。据此可以定义能量加权角关联的不对称性，

$$A(\theta) = f(\pi - \theta) - f(\theta),$$

或表示为，

$$A(\theta) = \frac{d\sigma}{d\theta}(\pi - \theta) - \frac{d\sigma}{d\theta}(\theta),$$

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

理论上预期  $A(\theta)$  对胶子辐射和三喷注的结构敏感，特别有趣的是，计算表明它对碎裂机制是相对不灵敏的。 $\alpha_s^2$  阶的  $QCD$  截面修正也已计算，但结果因不同的喷注分辨标准而有所差异。图 5.24 给出了在质心能量 34 GeV 实验观测到的  $A(\theta)$  与忽略碎裂的  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  阶  $QCD$  计算结果的比较，两者符合的很好，拟合给出  $\alpha_s(34\text{GeV}) = 0.115 \pm 0.005$ 。

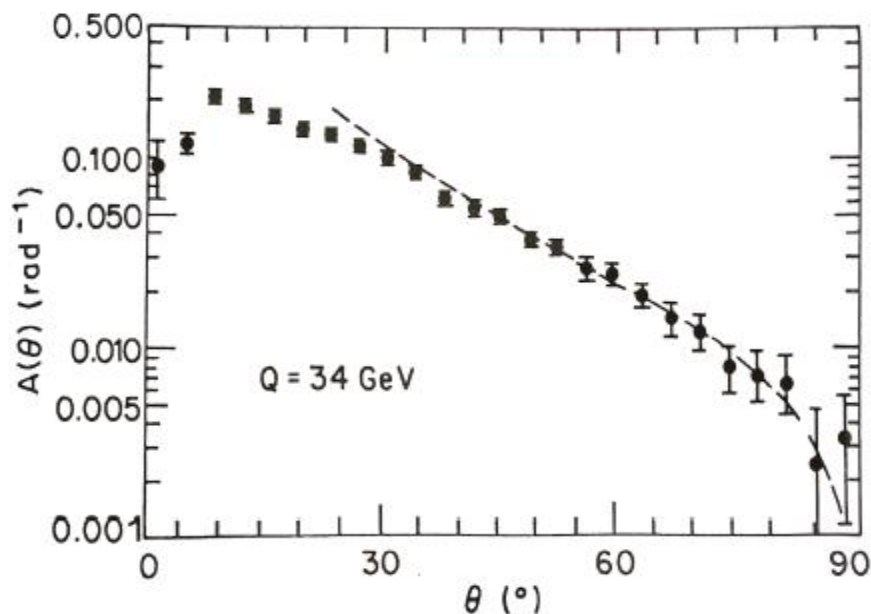


图 5.24:  $\sqrt{s} = 34\text{GeV}$  观测到的  $A(\theta)$  与忽略碎裂的  $QCD$  计算结果的比较 (JADE 数据, Z. Phys. C25, 231 (1984))。

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

三喷注事例还可以用来测量胶子的自旋。若三喷注以能量排序  $E_1 > E_2 > E_3$ ，在喷注 2 和 3 的静止系中将喷注 1 和 3 之间的夹角记为  $\tilde{\theta}$ ，如图 5.25(a) 所示。理论上给出了假设胶子为标量 ( $J = 0$ ) 或矢量 ( $J = 1$ ) 时的分布，

图 5.25: 喷注 2 和 3 的静止系 (a) 和实验室系 (b) 的喷注夹角标记。

$$J = 0: \quad \frac{dN}{d \cos \tilde{\theta}} \propto 1 + 0.2 \cos^2 \tilde{\theta},$$
$$J = 1: \quad \frac{dN}{d \cos \tilde{\theta}} \propto 1 + 2 \cos^2 \tilde{\theta}.$$

实际上  $\tilde{\theta}$  可以用  $e^+e^-$  质心系中三喷注相互之间的夹角表示之。如图 5.25(b) 所示，记喷注 1 和 2，2 和 3，3 和 1 之间的夹角分别为  $\theta_3$ ， $\theta_1$ ， $\theta_2$ ，则有，

$$\cos \tilde{\theta} = \frac{\sin \theta_2 - \sin \theta_3}{\sin \theta_1}.$$



图 5.25: 喷注 2 和 3 的静止系 (a) 和实验室系 (b) 的喷注夹角标记。

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

测量结果如图 5.26 所示，与矢量胶子的  $QCD$  预言相符合。

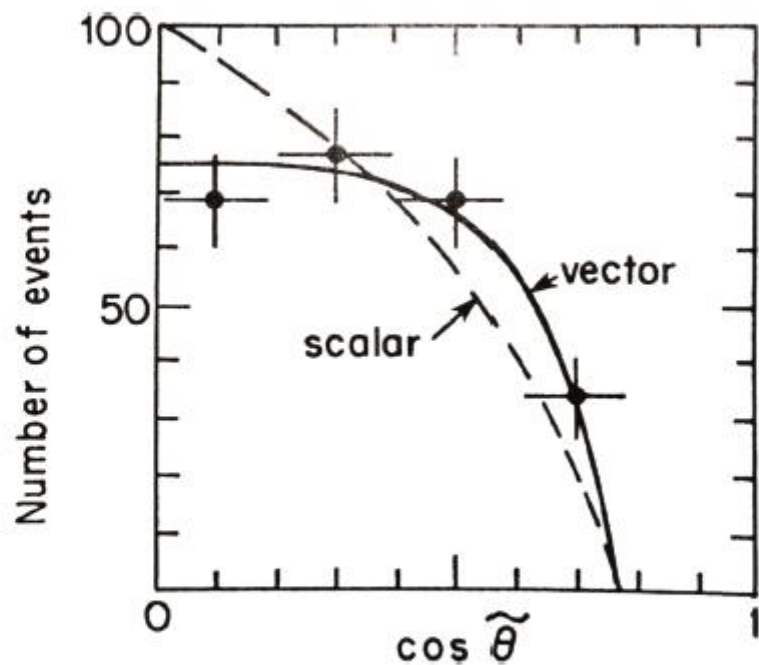


图 5.26: 三喷注事例的  $\tilde{\theta}$  分布与矢量胶子和标量胶子模型预期的比较 (TASSO 数据, Phys. Lett., 97B, 453 (1980))。

# 7. 三喷注物理及胶子的发现

胶子自旋的测量也显示在  $LEP$  冲度分布的结果中，如图 5.27。若胶子自旋为标量，将没有软出射的发散，只有共线发散，因此冲度分布的发散比矢量胶子要弱的多。图中结果清晰地显示和胶子的矢量特征相符，虽然在  $T \approx 2/3 - 1$  区间显示还需要计算更高阶的  $QCD$  修正。

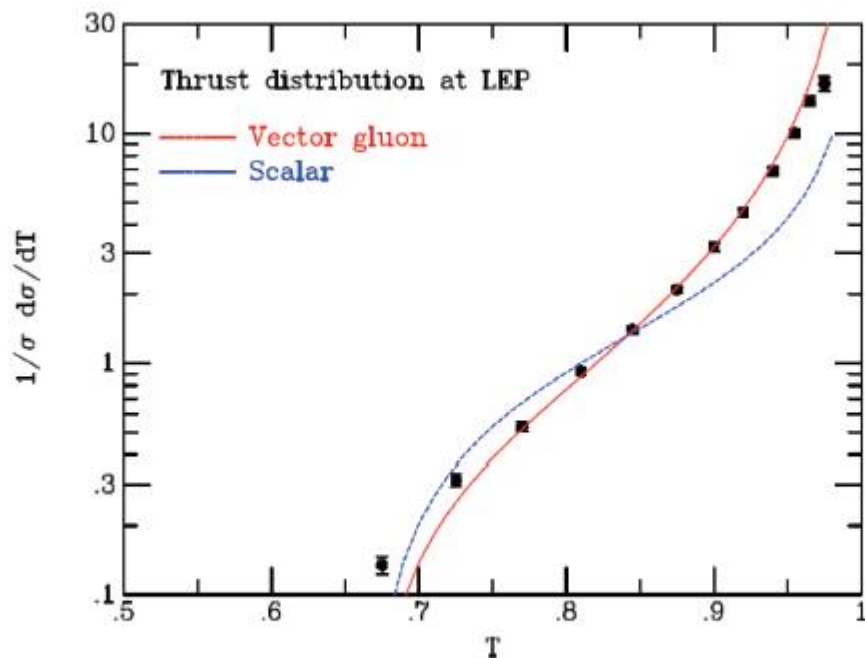


图 5.27:  $LEP$  测得的冲度分布与矢量胶子（红色实线）和标量胶子（蓝色虚线）模型预期的比较。引自 [10]

# 重离子碰撞实验

❖ 重离子碰撞过程中很多核子相互碰撞挤压，有可能发生相变，形成夸克胶子等离子体。相当于一个较大尺度的QCD相互作用态，而对比于强子内的夸克和胶子相互作用只是小尺度。相对论重离子碰撞实验研究的虽然是原子核的碰撞，但与QCD真空性质直接相关，是粒子物理和核物理研究的交叉领域。

❖ 在原子核中两个相邻核子之间的距离大约超过 $2\text{fm}$ ，各核子间距离大于核子半径的两倍，各核子之间是互相分开的，颜色禁闭效应使各个强子之间是相对独立的，这就是典型的强子物质。

❖ 在量子色动力学中，两个色禁闭的夸克之间的势能随着距离增加迅速增加，如果两个夸克之间有许多其它的夸克，它们就会造成类似于电动力学的Debye屏蔽效应。当两个夸克之间的距离大于Debye屏蔽距离时，它们之间的相互作用就会被屏蔽掉了。当然由于QCD的色禁闭效应，相邻的夸克之间会很快形成一个色单态的强子。只有在相对论性的重离子碰撞中形成的高温高密夸克胶子物质，才有可能完成相变，产生新的物质态形式：夸克胶子等离子体(QGP)。

❖ 美国布鲁克海文国家实验室的RHIC对撞机2000年开始运行金原子核和金原子核对撞，后来也进行铅原子核的对撞。质心系有效能量为 $100\text{ GeV}$ 。在RHIC重离子碰撞实验中，有Phoenix和STAR等四个实验组。在LHC实验上，Alice组就是研究铅核-铅核对撞，束流能量为 $2.76\text{TeV}$ 。

# 重离子碰撞实验

♣ 在重离子碰撞实验中，如果发生的是一级相变，则相变特征非常明显，找到临界点就可以了。但是更多的研究显示，QCD的夸克胶子等离子体相变很可能只是二级相变，这意味着没有明显的临界点。在重离子碰撞实验研究中，判断是否确实实现了从强子物质态到夸克胶子等离子体的相变，人们提出了几个比较有特征性的信号：

(1) **直接光子和直接轻子。** 在大量强子产生时，还会伴随有光子和轻子产生。由于强相互作用产生的是强子，光子和轻子往往是由强子再衰变而产生的，这样它们的能量一般比较低。如果产生了夸克胶子等离子体，就可能在夸克胶子等离子体形成初期温度还比较高时，就由夸克反夸克直接发出光子和通过光子产生轻子，这些直接光子和轻子将具有较高的能量，与强子衰变出来的光子和轻子有明显的不同。

(2)  **$K/\pi$  比的上升。** 在夸克胶子等离子体中，K介子和 $\pi$ 介子的形成都是由夸克与反夸克直接生成的。由于温度 $T \sim 200\text{MeV}$ ，s夸克虽比u、d夸克重，但由于温度高，s夸克和u、d夸克质量差对K介子和 $\pi$ 介子相对产额的影响要比强子物质相时小得多。这将表现为 $K/\pi$ 比的增长。考虑到s夸克只有一部分形成 $K^-$ 和 $\bar{K}^0$ 粒子，同时 $K^-$ 介子产生后也很容易被再吸收，而 $\bar{s}$ 夸克将主要形成 $K^+$ 和 $K^0$ 介子，并且 $K^+$ 介子产生后也不易再被吸收，这种增长将特别明显地在 $K^+/\pi^+$ 上表现出来。在QGP中正夸克多，反夸克少。



# 重离子碰撞实验

(3)  $J/\psi$ 压低。如果在夸克胶子等离子体中产生了 $c$ 和 $\bar{c}$ ，它们可以结合 $J/\psi$ 粒子，也可以和其它夸克反夸克结合成 $D$ 和 $\bar{D}$ 介子。由于 $c$ 和 $\bar{c}$ 数量较少，它们的平均距离较远，Debye屏蔽效应将使它们不容易相互结合成 $J/\psi$ 粒子而比较容易就近与其它夸克反夸克结合成 $D$ 和 $\bar{D}$ 介子；因此和 $D$ 、 $\bar{D}$ 相比， $J/\psi$ 粒子的产生就受到了压低。而在一般强子物质相中不会有这种机理。

♣ 尽管这几个实验现象被作为夸克胶子等离子体出现时带有特征性的信号而提出来，但是理论的研究又表明：即使没有发生相变，在强子物质相的高能量基础上，这几种特征性的信号也都有可能会出现。因此在实验上观察到了这些信号之后，要确切判断是否确实出现了夸克胶子等离子体，还需要做细致的分析工作，特别是需要观察到是否发生了相变。

# 重离子碰撞实验

---