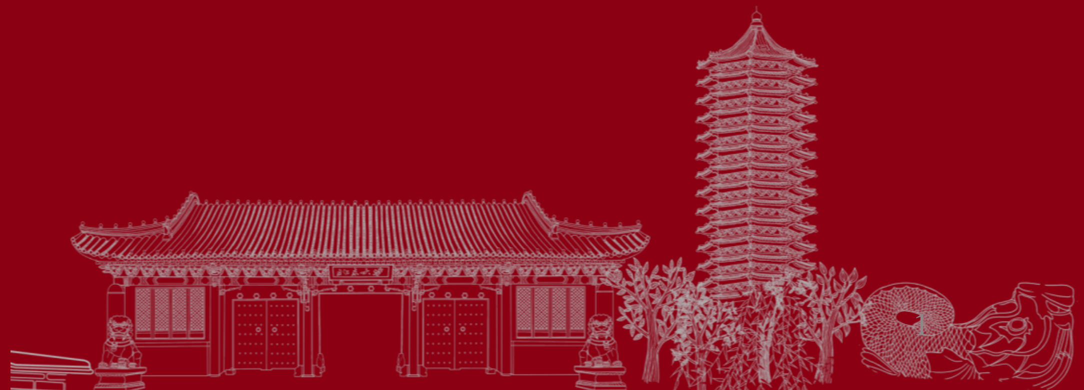
北京大學
PEKING UNIVERSITY

π^0 −pole's contribution to HLbL in muon g-2

北京大学 林天

2024年7月9日

超级陶粲装置研讨会，兰州

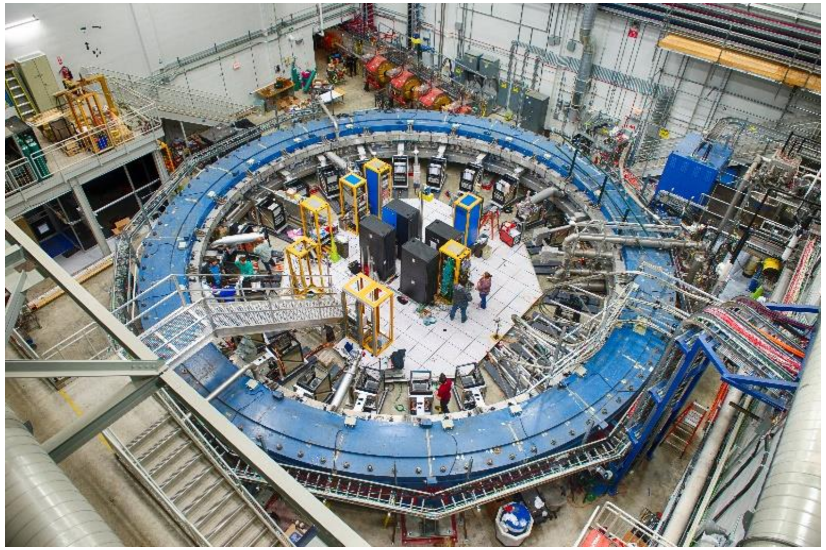


北京大学 PEKING UNIVERSITY

CONTENTS

缪子反常磁矩之谜

2023年费米实验室最新实验



(缪子反常磁矩储存环)

$$a_\mu \times 10^{10} - 11659000 = 205.5(2.4)$$

精度: 0.20 ppm

(Aguillard et al., 2023)

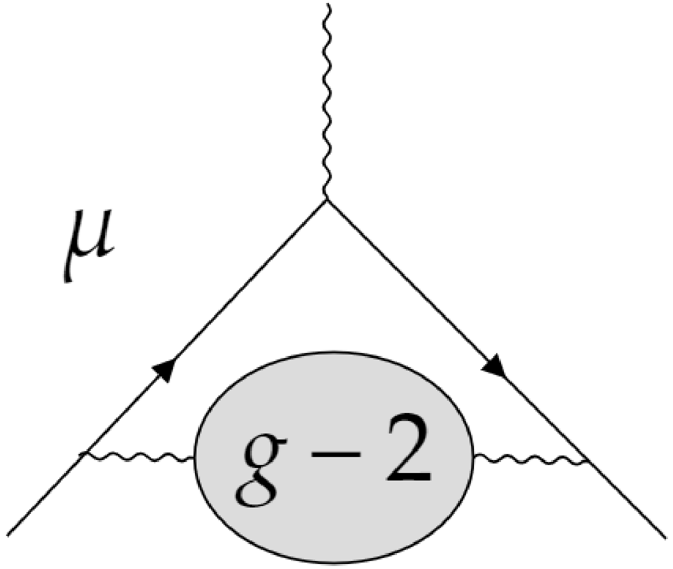
新物理?

5.0 σ

显著性偏差

$$\Delta a_\mu \times 10^{10} = 24.5(4.9)$$

2020年缪子反常磁矩白皮书



$$a_\mu \times 10^{10} - 11659000 = 181.0(4.3)$$

精度: 0.37 ppm

(Aoyama et al., 2020)

需要在标准模型下进行更加精确的计算!

缪子反常磁矩之谜

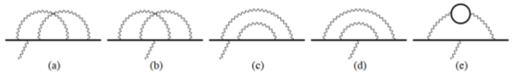
纯电磁相互作用:

$a_\mu^{QED} \times 10^{11} =$

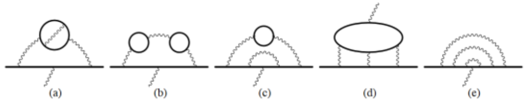
116584718.931 ± 0.104

主要贡献，误差可忽略

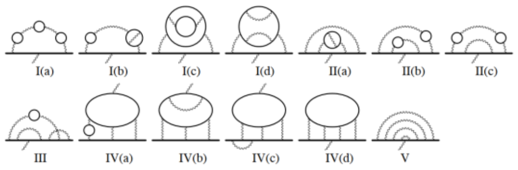
四阶



六阶



八阶



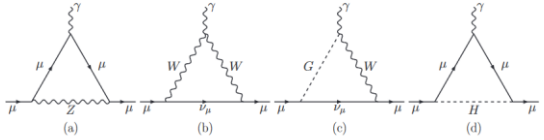
…

电弱相互作用:

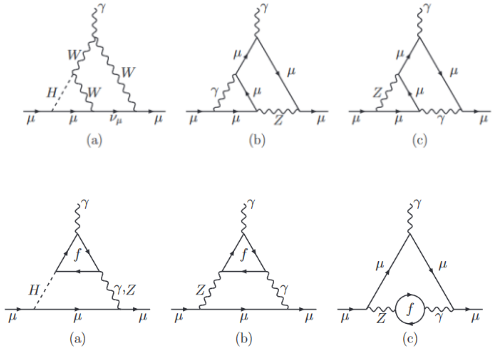
$a_\mu^{EW} \times 10^{11} = 153.6 \pm 1.0$

被W/Z质量压低，不占主导

一圈



双圈



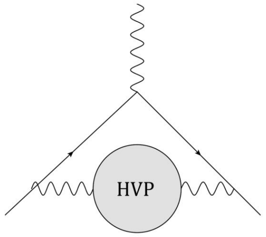
…

强相互作用:

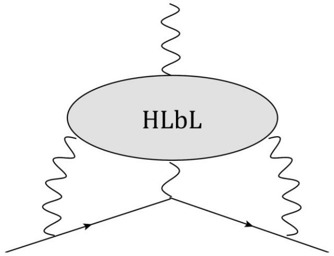
$a_\mu^{Hardon} \times 10^{11} = 6937 \pm 44$

主要不确定度来源

$\mathcal{O}(\alpha^2)$

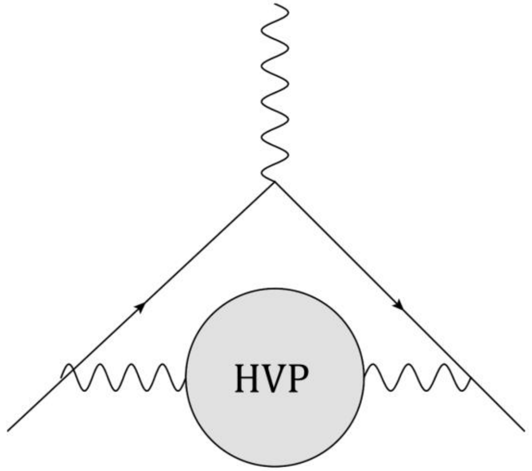


$\mathcal{O}(\alpha^3)$



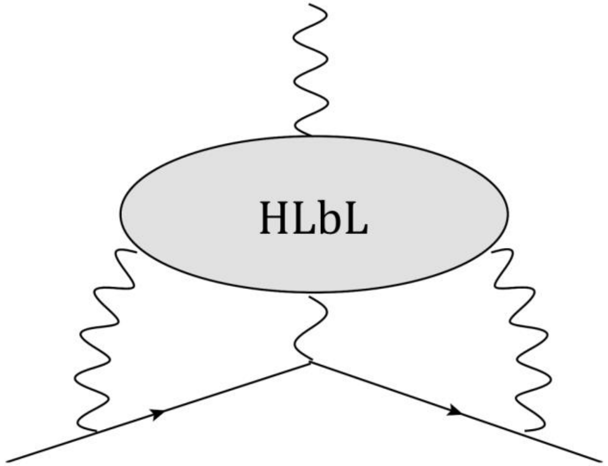
强相互作用对缪子反常磁矩的贡献

$\mathcal{O}(\alpha^2)$ HVP
强真空极化



2020 白皮书 : $a_\mu^{HVP} = 6931(40) \times 10^{-11}$
目标精度：0.2%

$\mathcal{O}(\alpha^3)$ HLbL
强光子光子散射



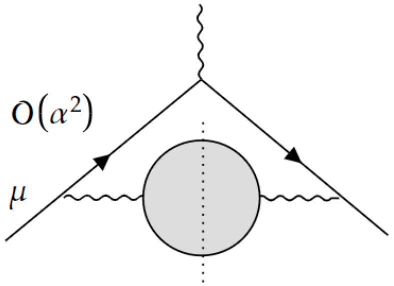
$a_\mu^{HLbL} = 92(18) \times 10^{-11}$
目标精度：10%

非微扰特性使得强相互作用的计算极具挑战性

- 色散关系
- 格点QCD

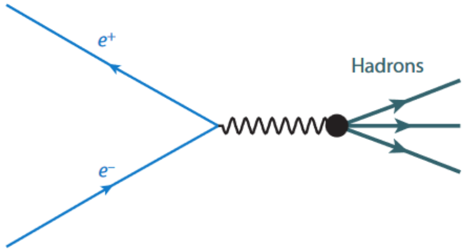
强真空极化 HVP

领头阶 HVP



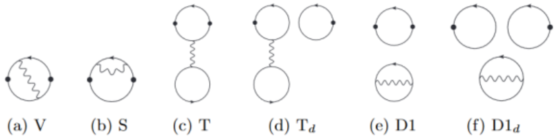
- 色散关系:
  数据驱动

实验输入
- e^+e^- 散射截面: $\pi^+\pi^-$
- τ 强衰变: $\pi^-\pi^0$
- $2K, 3\pi, 4\pi, J/\psi$ 道
- R 值测量



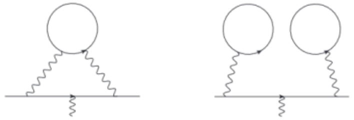
- 格点 QCD

同位旋对称:

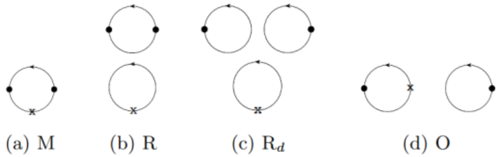


目标精度高于1%

QED 修正:

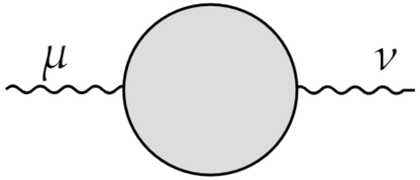


强同位旋破缺:



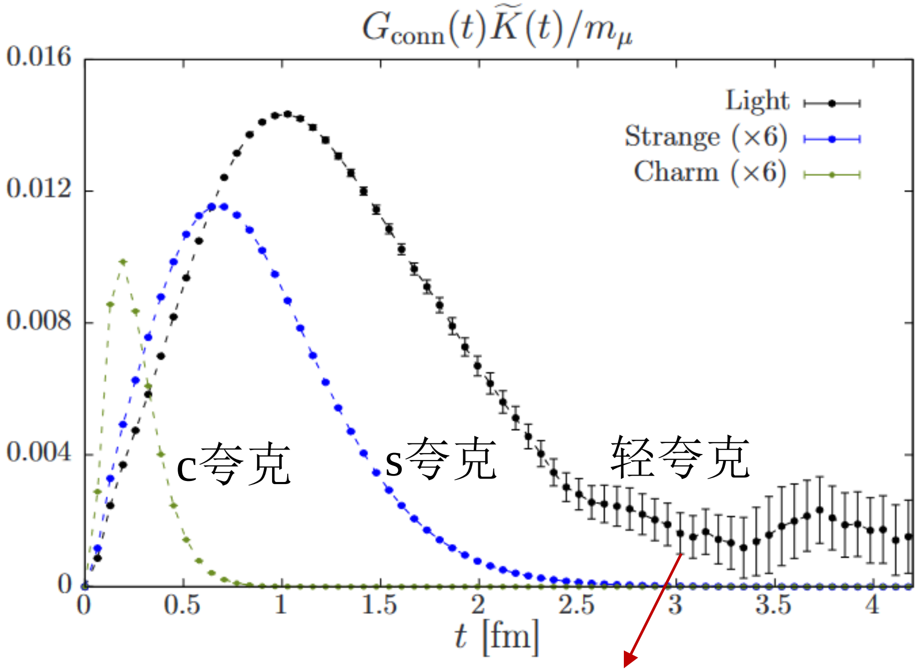
$\cdots$ (Blum et al., 2018)

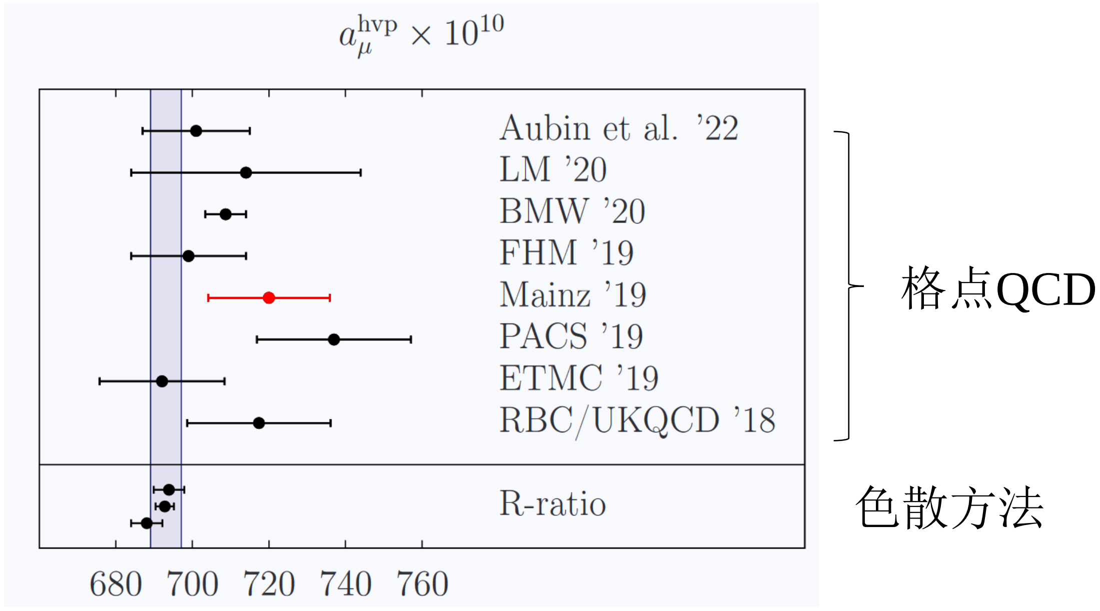
强真空极化的格点计算



$$a_\mu^{HVP} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty dt\, K(t) G(t), \qquad G(t) = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{\vec{x}} \langle J_k(x) J_k(0) \rangle$$

(Blum ’02)





(Gérardin, lattice2023)

- 信噪比问题
- 有限体积效应 $\mathcal{O}(3\%)$ 对于 $L \approx 6fm$
- 格距误差

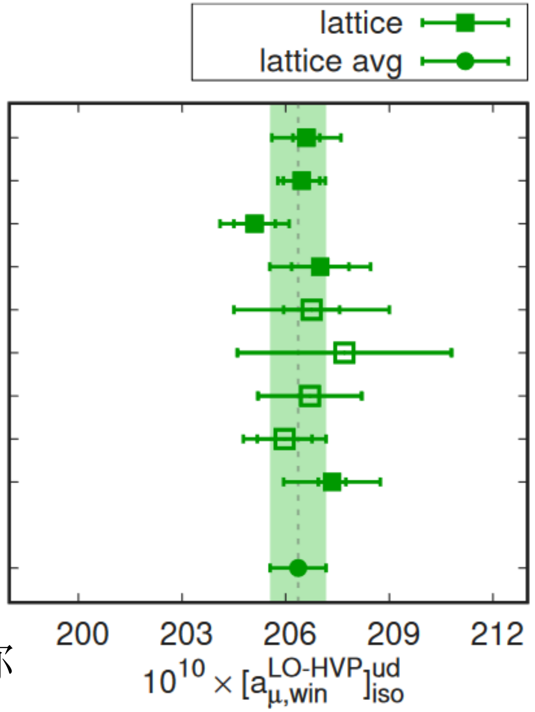
早期的格点计算结果精度较低

强真空极化：windows method

$$a_\mu^{\text{win}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty dt\, K(t)G(t)W(t;t_0,t_1)$$

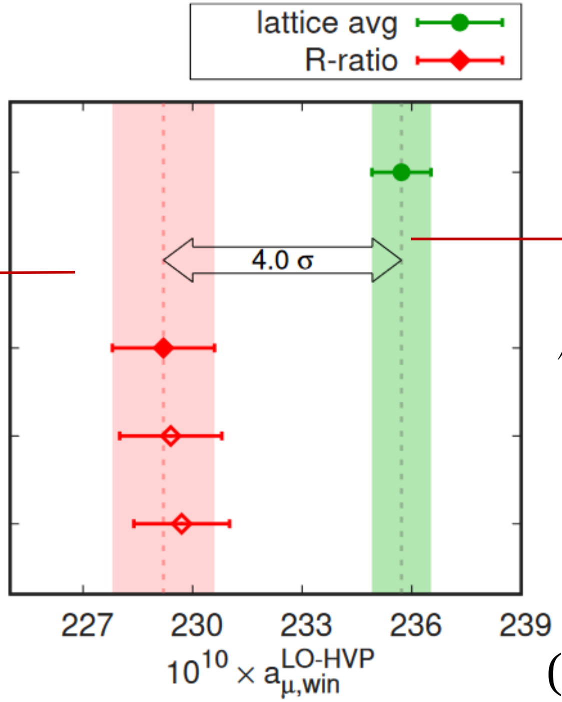
长程部分：有限体积效应，统计误差
短程部分：格距误差
窗函数：提取中程部分的贡献 (intermediate window)

$a_{\mu,win}^{LO-HVP}$：



轻夸克同位旋对称部分的贡献

～总贡献 30%
各个格点组结果一致



色散方法

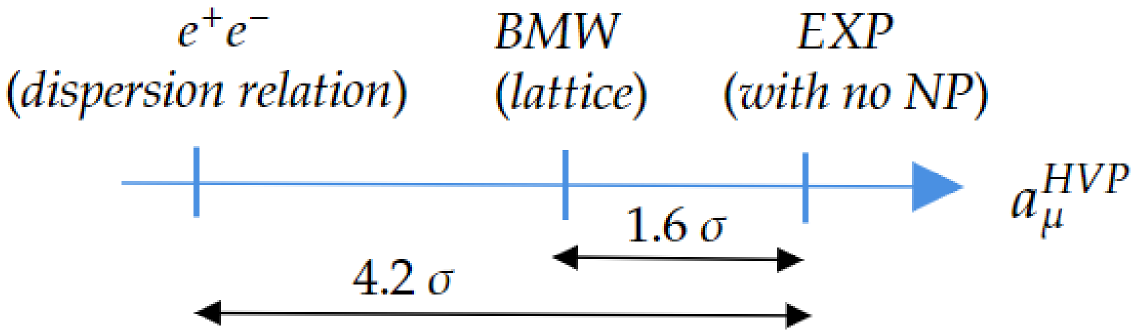
格点结果
（考虑 QED，强同位旋破缺，重夸克）

(Davier et al., 2023)

格点结果同色散方法存在一定差异

强真空极化新谜题

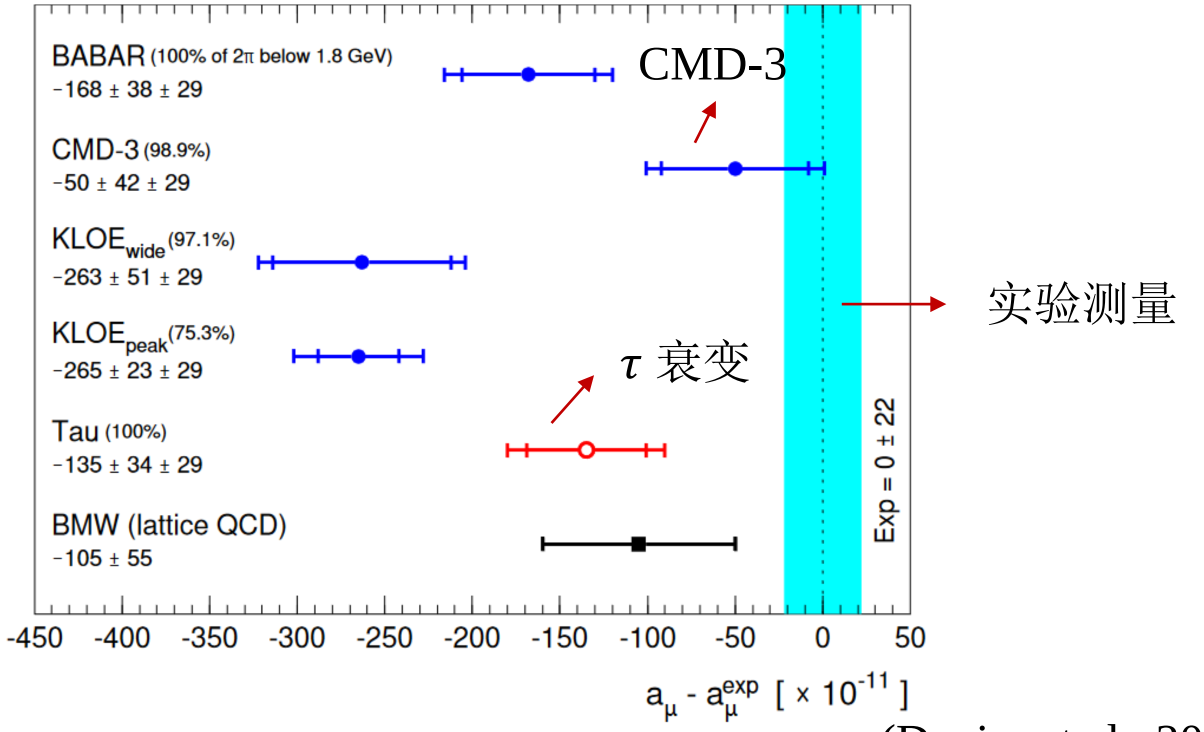
新谜题?
实验vs色散方法vs格点



色散方法:
不同实验输入存在差别
$e^+e^- \to 2\pi$

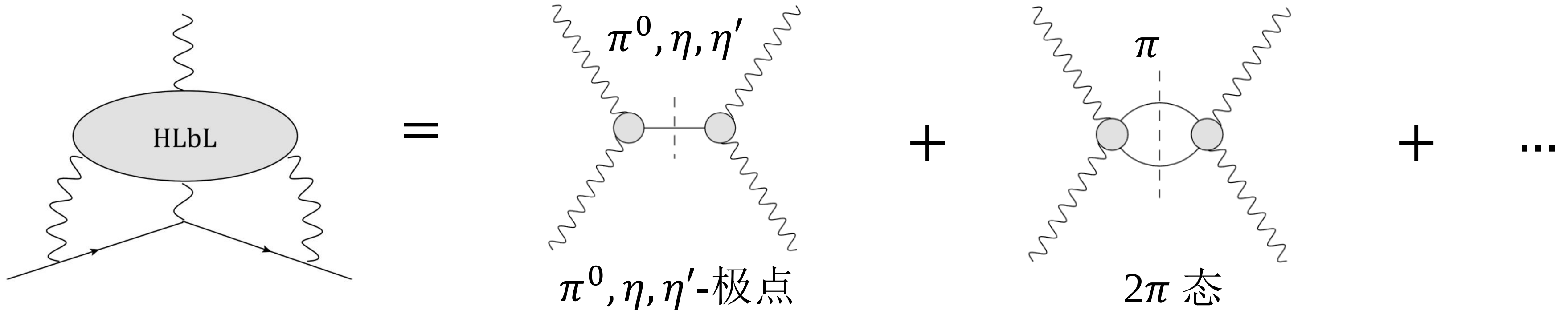
- BABAR
- KLOE
- CMD3

τ 衰变



(Davier et al., 2023)

强光子-光子散射 HLbL



色散方法：各个中间态的贡献

色散方法	$a_\mu \times 10^{11}$
π^0,η,η' 极点	93.8 ± 4.0
π/K 圈	-16.4 ± 0.2
S-波 $\pi\pi$	-8 ± 1
轴矢粒子	6 ± 6
标量、张量粒子	-1 ± 3
短程贡献	15 ± 10
粲夸克以及更重夸克	3 ± 1
总和	92 ± 19
Mainz,22	109.6 ± 15.9
RBC/UKQCD,23	124.7 ± 15.2

格点直接计算

两种格点计算方案：

- 在色散分析的框架下计算：π^0,η,η' 极点
- 直接计算四点函数

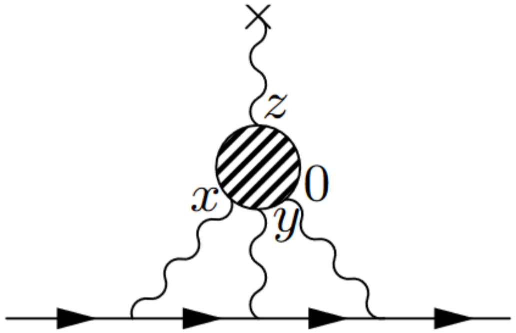
目前的精度（~15%）下，色散方法和格点计算均给出一致的结果。

强光子-光子散射：格点直接计算 QED_∞方案

$$a_\mu^{HLbL} = \frac{me^6}{3}\int_y\int_x \bar{\mathcal{L}}_{[\rho,\sigma];\mu\nu\lambda}(x,y)\, i\,\widehat{\Pi}_{\rho;\mu\nu\lambda\sigma}(x,y)$$

HLbL 张量

$$i\,\widehat{\Pi}_{\rho;\mu\nu\lambda\rho}(x,y) = -\int d^4z\, z_\rho \langle J_\mu(x) J_\nu(y) J_\rho(z) J_\sigma(0)\rangle$$



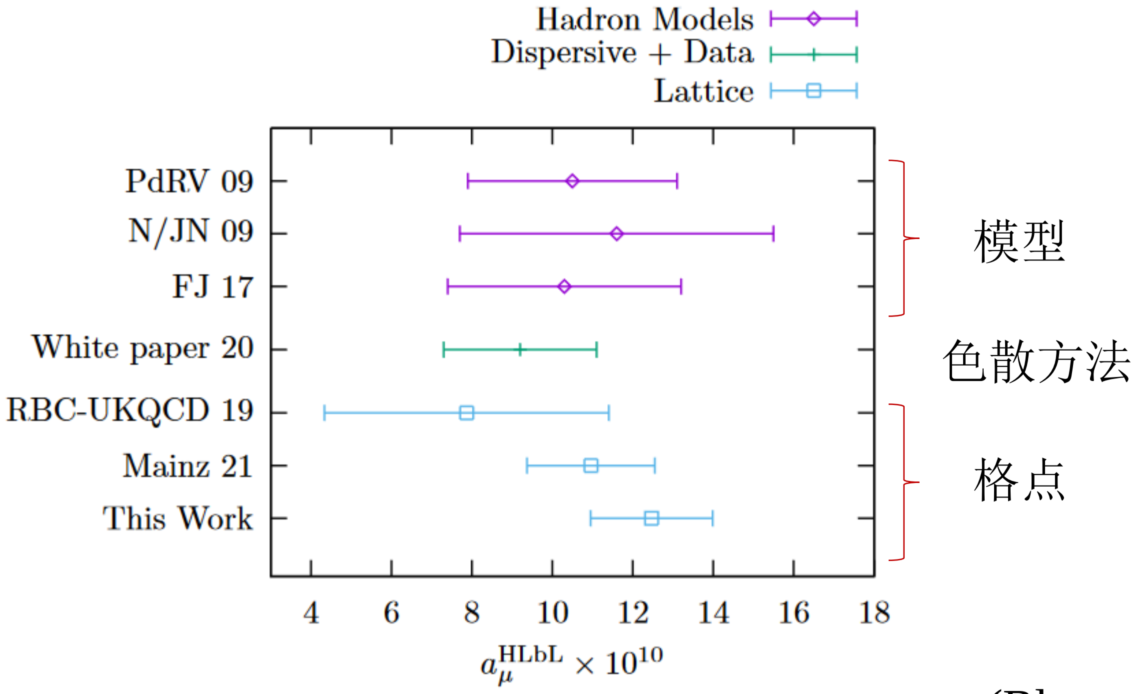
QED_∞ 方案

- $\widehat{\Pi}_{\rho;\mu\nu\lambda\rho}(x,y)$：

四点函数，可以通过格点计算

- $\bar{\mathcal{L}}_{[\rho,\sigma];\mu\nu\lambda}(x,y)$：

无穷体积中的QED权重函数，可以半解析计算

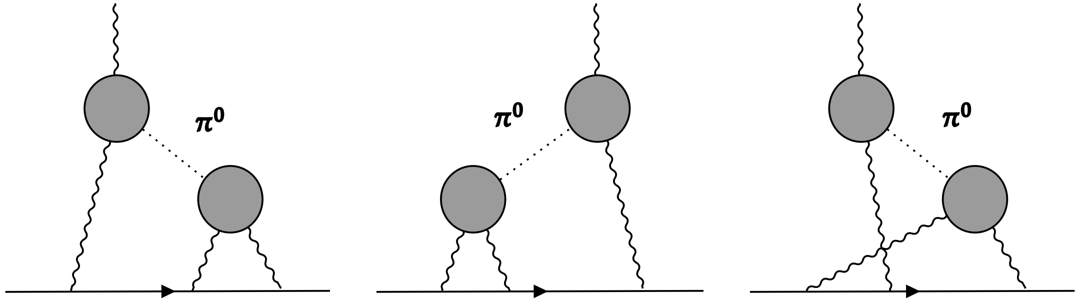


(Blum et al., 2023)

PEKING UNIVERSITY

CONTENTS

π^0 极点对HLbL的贡献

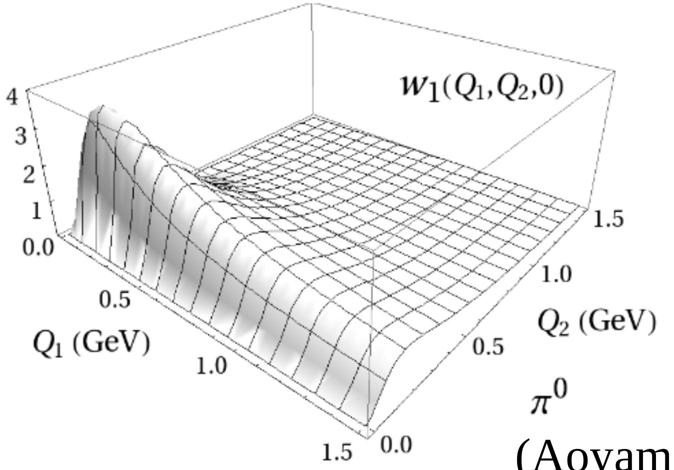


π^0 极点对HLbL贡献

$$a_\mu^{\pi^0-pole} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \int dQ_1 dQ_2 d\tau [w_1(Q_1,Q_2,\tau) F_{\pi\gamma^*\gamma^*}(-Q_1^2,-Q_3^2) F_{\pi\gamma^*\gamma^*}(-Q_2^2,0)$$
$$+ w_2(Q_1,Q_2,\tau) F_{\pi\gamma^*\gamma^*}(-Q_1^2,-Q_2^2) F_{\pi\gamma^*\gamma^*}(-Q_3^2,0)$$

$w_1(Q_1,Q_2,\tau), w_2(Q_1,Q_2,\tau)$: 权重函数

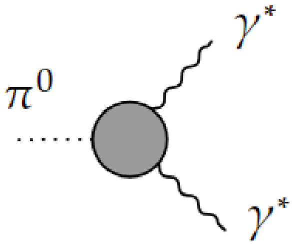
$F_{\pi\gamma^*\gamma^*}(-Q_1^2,-Q_2^2)$: π^0 转变形状因子



π^0

(Aoyama et al., 2020)

约$Q^2 \sim m_\pi^2$ 时取极值



需要任意类空动量形状因子输入

π^0 转变形状因子的提取

北京大学 PEKING UNIVERSITY

格点输入: $\mathcal{H}_{\mu\nu}(x)$

任意类空动量的 π^0转变形状因子

$$i\int d^4x e^{-iq_1\cdot x}\boxed{\langle\Omega|T\{J_\mu(x)J_\nu(0)\}|\pi^0(p)\rangle} \equiv \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}q_1^\alpha q_2^\beta \boxed{\mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(-q_1^2,-q_2^2)}$$

$$q_1 = (iE, \vec{q}\,)$$

传统方案:

E: 自由参数

$\vec{q} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$: 格点动量

并非所有动量取值的形状因子都可以直接计算必须引入模型进行参数化

VMD 模型，z 展开…

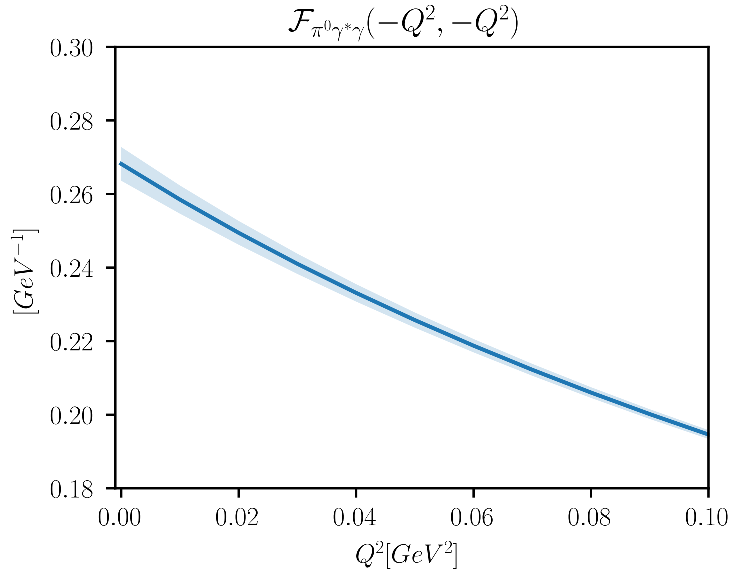
无穷体积标量函数方案

$$\mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(-q_1^2,-q_2^2) = \frac{1}{2m_\pi}\int dt\int d^3x\, e^{Et}\,\frac{j_1(|\vec{q}||\vec{x}|)}{|\vec{q}||\vec{x}|}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha 0}x_\alpha\mathcal{H}_{\mu\nu}(x)$$

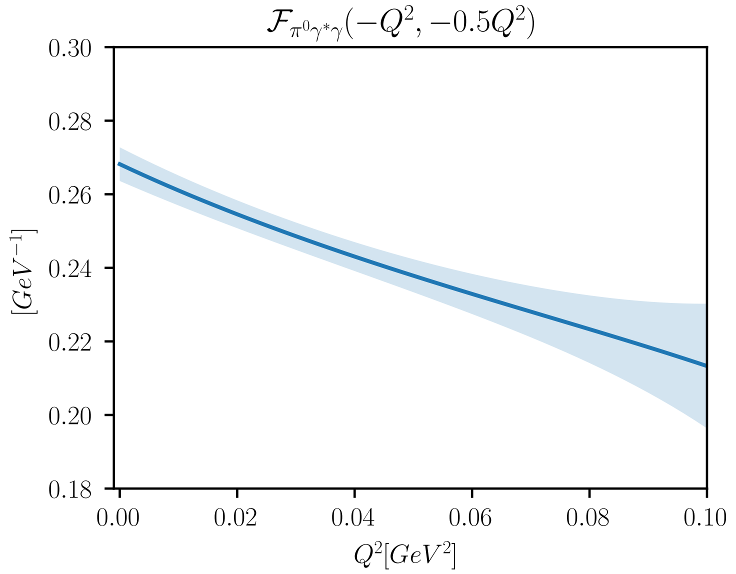
可以直接计算任意动量的形状因子

π^0 形状因子的计算结果

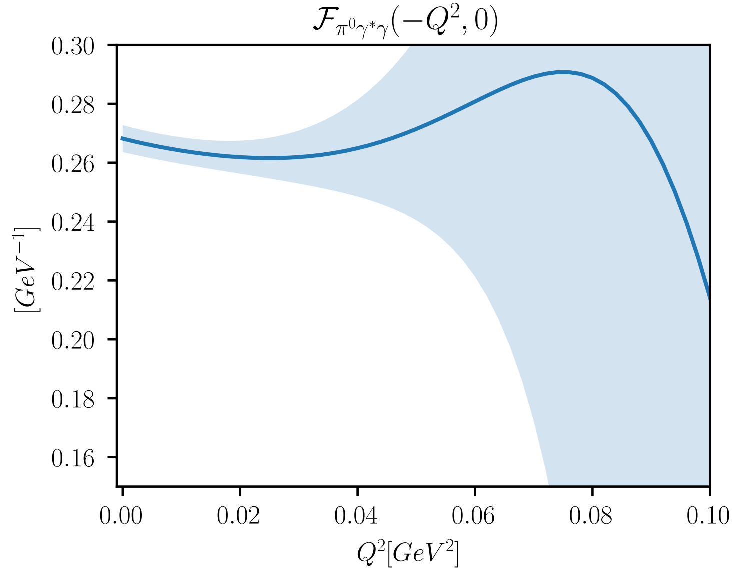
在 π^0 静止系中



$Q_1^2 = Q_2^2 = Q^2$



$Q_1^2 = Q^2, Q_2^2 = 0.5Q^2$



$Q_1^2 = Q^2, Q_2^2 = 0$

当 $Q_1^2 \neq Q_2^2$ 时，权重函数中的指数因子会显著放大统计误差。

信噪比问题导致无法得到 $a_\mu^{\pi^0-pole}$

强子函数的洛伦兹结构

北京大学 PEKING UNIVERSITY

强子函数
$\mathcal{H}_{\mu\nu}(x)$'s 对 $p \cdot x$ 的依赖

被描述 →

π 结构函数
(在短程部分等于 π 分布振幅)

(Bali et al., 2018)

强子函数

保持 SO(4) 对称性

$$H(x^2, p \cdot x) = \int_0^1 du\ e^{i\left(u-\frac{1}{2}\right)p\cdot x}\phi_\pi(x^2, u)\boxed{H(x^2, 0)}$$

π 结构函数
- 夸克反夸克对称性: $\phi_\pi(x^2, u) = \phi_\pi(x^2, 1-u)$
- 归一化条件: $\int_0^1 du\ \phi_\pi(x^2, u) = 1$ ★

π^0 转变形状因子:

$$\mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(-q_1^2, -q_2^2) = \int_0^1 du \int d^4x\ e^{-ik\cdot x}\frac{(x\cdot k)p^2 - (x\cdot p)(k\cdot p)}{k^2p^2 - (k\cdot p)^2}\phi_\pi(x^2, u)H(x^2, 0) \qquad with\ k = q_1 - up$$

SO(4) 平均

$$= -2i\int_0^1 du \int d^4x \boxed{\frac{J_2(kx)}{k^2}}\phi_\pi(x^2, u)H(x^2, 0) \longrightarrow 格点输入$$

物理 π 结构函数

😊 ❗ 解决了信噪比问题
🤔 ❓ 需要结构函数作输入

Gegenbauer 分解

北京大学 PEKING UNIVERSITY

格点输入　　结构函数　　解析已知

$$a_\mu^{\pi^0-pole} = \int d^4x_1\, d^4x_2 du_1 du_2 H(x_1^2,0)H(x_2^2,0)\phi_\pi(x_1^2,u_1)\phi_\pi(x_2^2,u_2)\rho_{sym}(x_1,x_2,u_1,u_2)$$

Gegenbauer 多项式 $C_{2n}^{\frac{3}{2}}(2u-1)$ 构成 [0,1] 上的正交完备基，将 ϕ_π, ρ_{sym} 分解为：

$$\phi_\pi(x^2,u) = 6u(1-u)\sum_n a_{2n}(x^2)C_{2n}^{\frac{3}{2}}(2u-1)$$

归一化条件要求: $a_0(x^2)=1$

$$\rho_{sym}(x_1,x_2,u_1,u_2) = \sum_{n,m} \rho_{2n,2m}(x_1,x_2)\, C_{2n}^{\frac{3}{2}}(2u_1-1)C_{2m}^{\frac{3}{2}}(2u_2-1)$$

随着 $n,m\uparrow$ 压低

$$a_\mu^{\pi^0-pole} \approx a_{0,0}^{\pi^0-pole} + \underbrace{a_{0,2}^{\pi^0-pole} + a_{2,0}^{\pi^0-pole}}_{} + \cdots$$

不依赖于结构函数

$\propto$ 结构函数的 a_2
主要的结构依赖项

忽略高阶项

如何确定 $\phi_\pi(x^2,u)$?

北京大学
PEKING UNIVERSITY

思考1: 能够通过格点提取?

原则上可以，但

- 需要 boost 一个较大的动量
- 反问题
- 并不必要，因为 $a_\mu^{\pi^0-pole}$ 对结构函数依赖不大

思考2: 如何估计结构依赖?

物理
$\phi_\pi(x^2,u)$

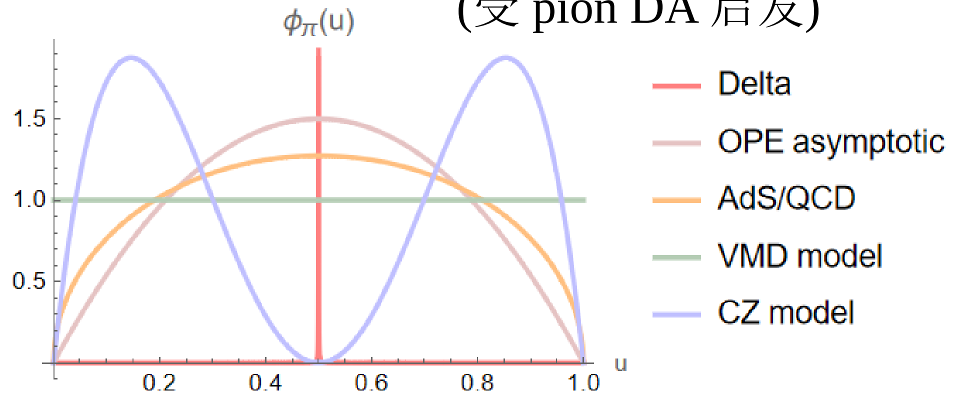
$\Longrightarrow$

一系列模型
$\phi_\pi(u)$

- Delta $\phi_\pi(u) = \delta(u-\frac{1}{2})$
- OPE 渐近 :$\phi_\pi(u) = 6u(1-u)$
- AdS/QCD:$\phi_\pi(u) = \frac{8}{\pi}\sqrt{u(1-u)}$
- VMD 模型:$\phi_\pi(u) = 1$
- CZ 模型: $\phi_\pi(u) = 30u(1-u)(1-2u)^2$
- $\cdots$

覆盖
不同
能标

(受 pion DA 启发)



通过不同模型估计系统误差

格点组态信息

北京大学 PEKING UNIVERSITY

id	m_π(MeV)	$a[fm]$	$L^3 \times T$	$m_\pi L$	N_{conf}
24D	143	0.194	$24^3 \times 64$	3.3	253
32D	142	0.194	$32^3 \times 64$	4.5	63
32Df	143	0.143	$32^3 \times 64$	3.3	69
48I	139	0.114	$48^3 \times 96$	3.9	112
64I	135	0.084	$64^3 \times 128$	3.7	65
16IH2	431	0.11	$16^3 \times 32$	3.9	302
24DH	328	0.193	$24^3 \times 64$	8.1	37
24IH1	340	0.110	$24^3 \times 32$	4.6	77
24IH2	431	0.110	$24^3 \times 32$	5.8	76
24IH3	573	0.110	$24^3 \times 32$	7.7	27
32IcoarseH1	340	0.110	$32^3 \times 64$	6.1	38
32IfineH	371	0.063	$32^3 \times 64$	3.8	118
32IH1	302	0.083	$32^3 \times 64$	4.1	49
32IH2	360	0.083	$32^3 \times 64$	4.8	57

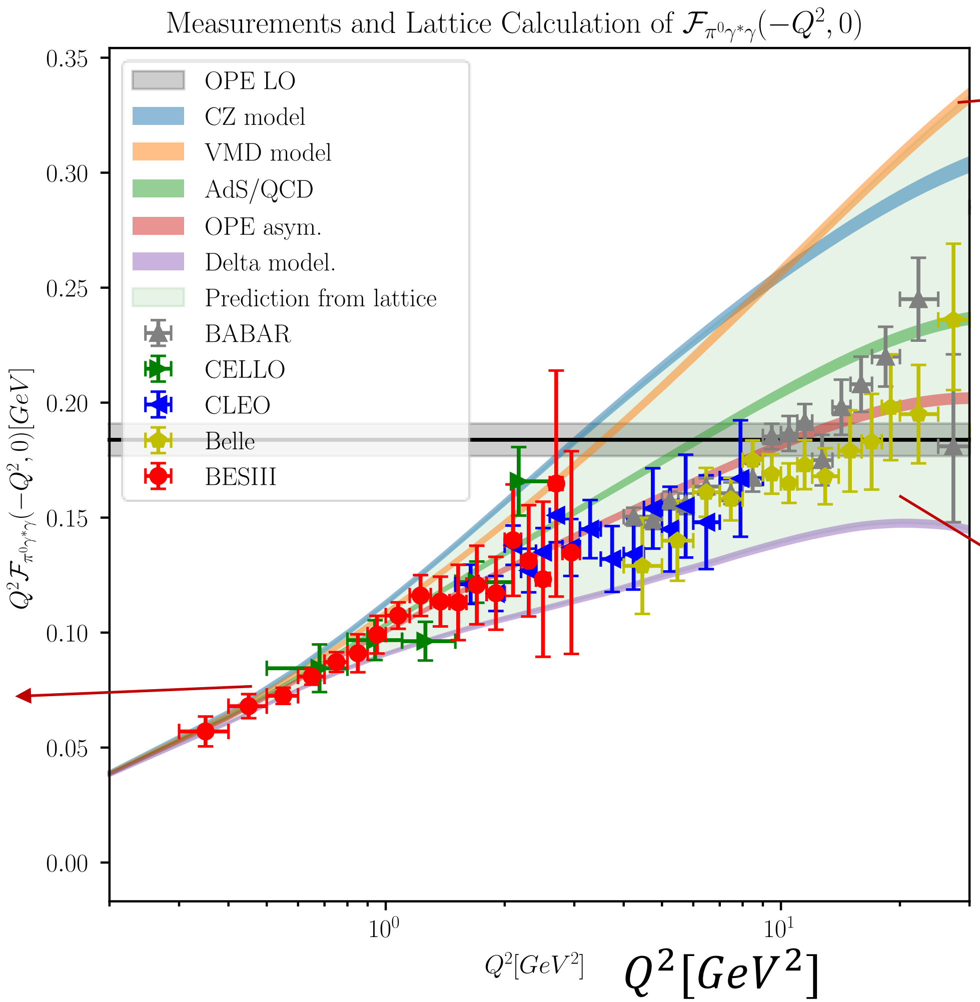
物理 π 质量

RBC/UKQCD 合作组产生(RBC et al., 2016)

Domain wall 费米子 + Iwasaki 规范作用量(+DSDR)

π^0 转变形状因子的计算

$\mathcal{F}(-Q^2, 0)$



$Q^2[GeV^2]$

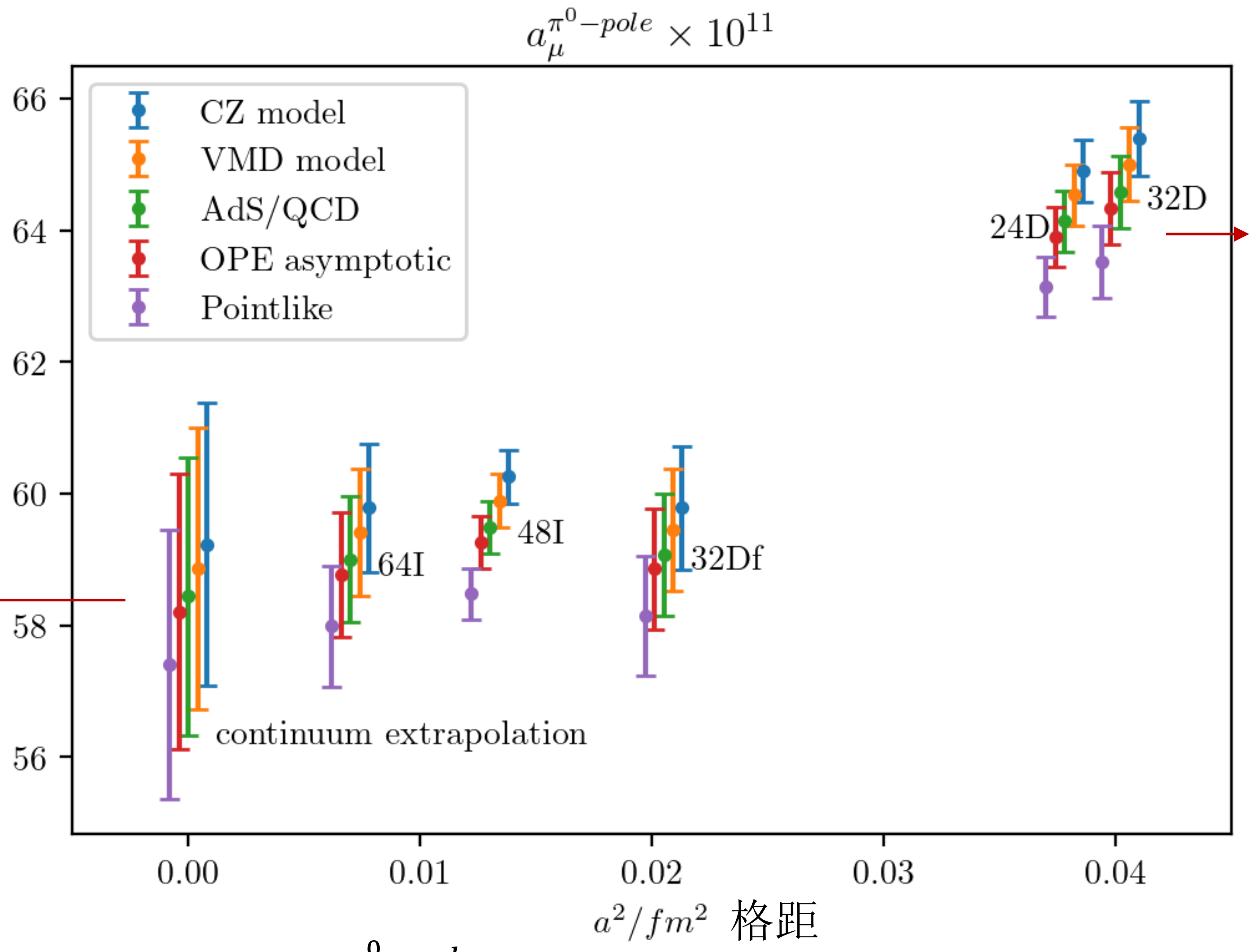
单个模型的结果
(连续极限外推后)

结合不同模型得到的
格点预测和实验一致!

实验数据:
包括 BABAR,
CELLO,CLEO,
Belle, BESIII

对模型的选择已经能很好的估计系统误差

$a_\mu^{\pi^0-pole}$ 的计算结果



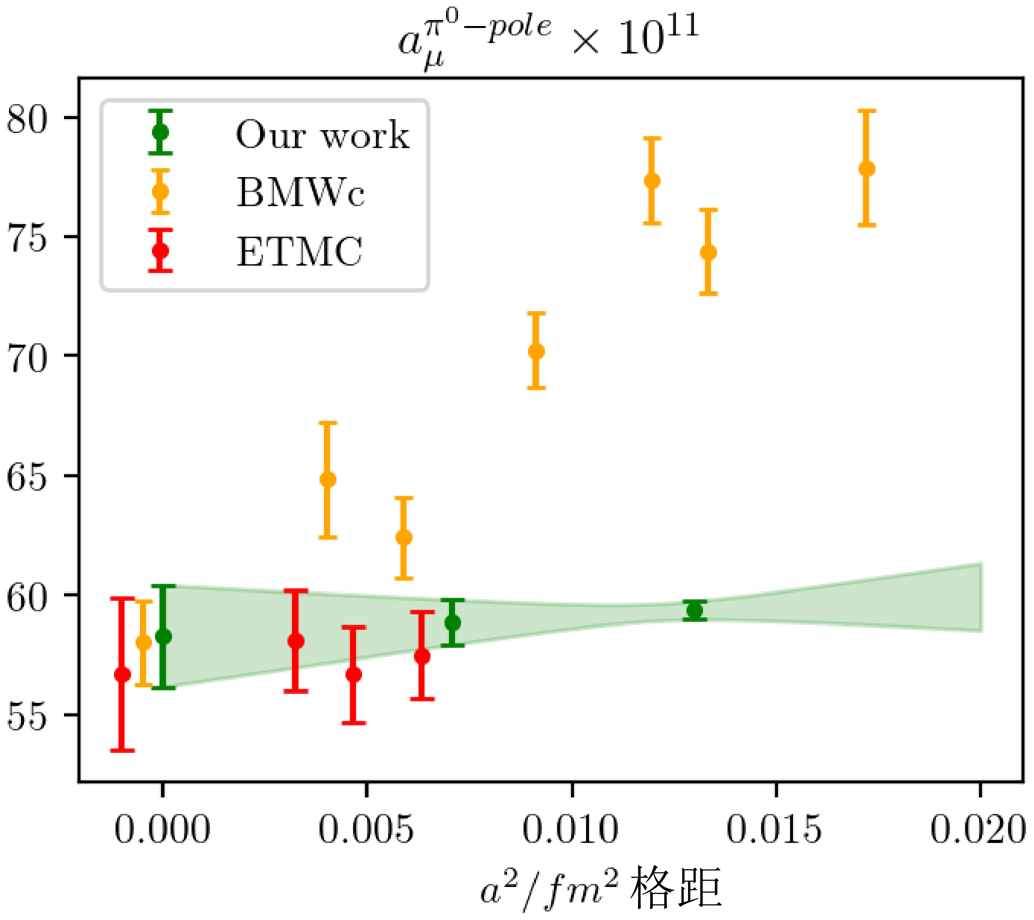
比较24D与32D:
有限体积效应可控

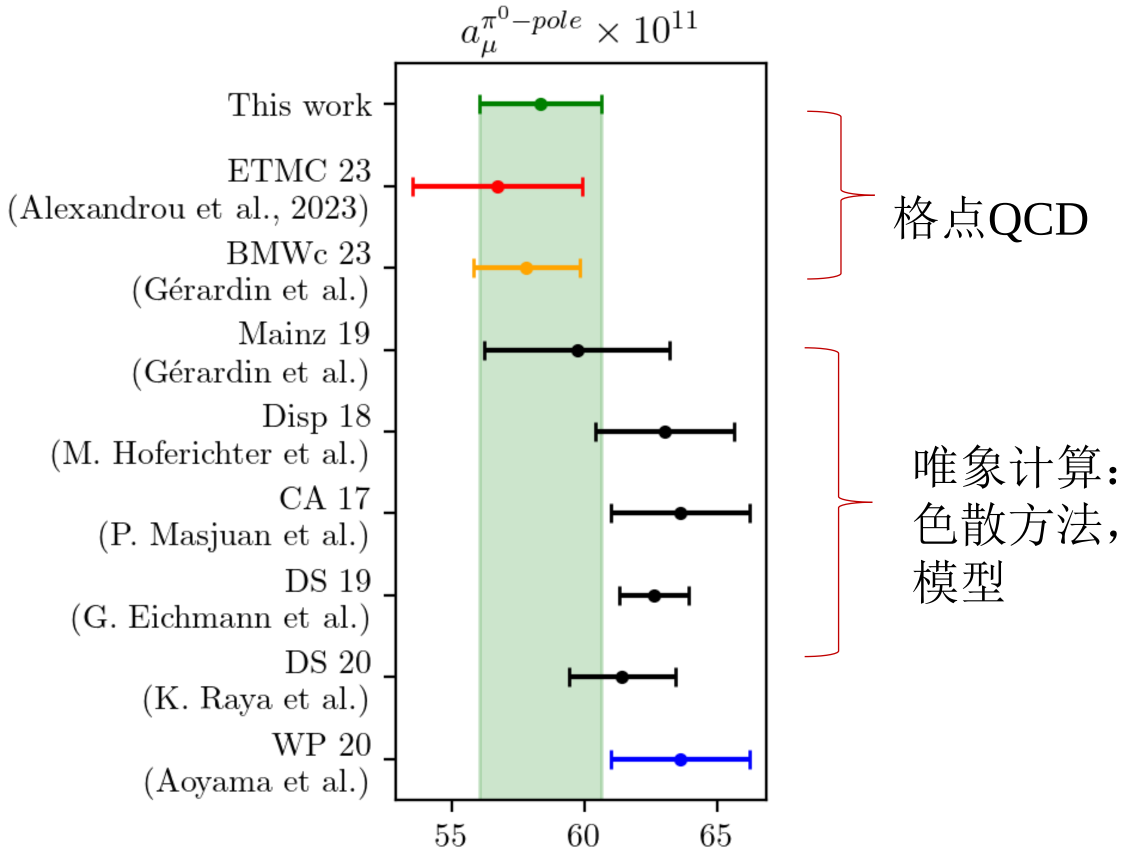
不同模型在
连续极限外推后一致

最终结果: $a_\mu^{\pi^0-pole} = 58.3(2.1)_{stat}(0.9)_{sys} \times 10^{-11}$

统计误差主导 > 系统误差

总结





- 提出一种计算π^0-极点对HLbL贡献的全新方案
- 格点QCD在缪子反常磁矩中发挥越来越重要的作用