



安徽大學
Anhui University

反转岛内丰中子核壳层结构的演化

Evolution of shell structure in neutron-rich nuclei inside the island of inversion



| 汇报人：魏亚蒙



| 指导老师：刘泉教授



| 汇报时间：2024/01/23



目录

CONTENTS

01

背景与意义

Background and Purpose

02

理论框架

Theoretical Framework

03

结果与分析

Results and Analysis

04

总结

Summary



安徽大學
Anhui University

01

Part One

背景与意义

Background and Purpose

✓ 原子核的壳模型

1949 年，德国科学家简森、美国科学家迈耶创立原子核结构的壳模型理论，由此获得了1963年的诺贝尔物理学奖。

【J. H. D. Jensen, et al., Phys. Rev.75, 1766 (1949).】

【M. G. Mayer, Phys. Rev. 75, 1969 (1949).】

✓ 幻数

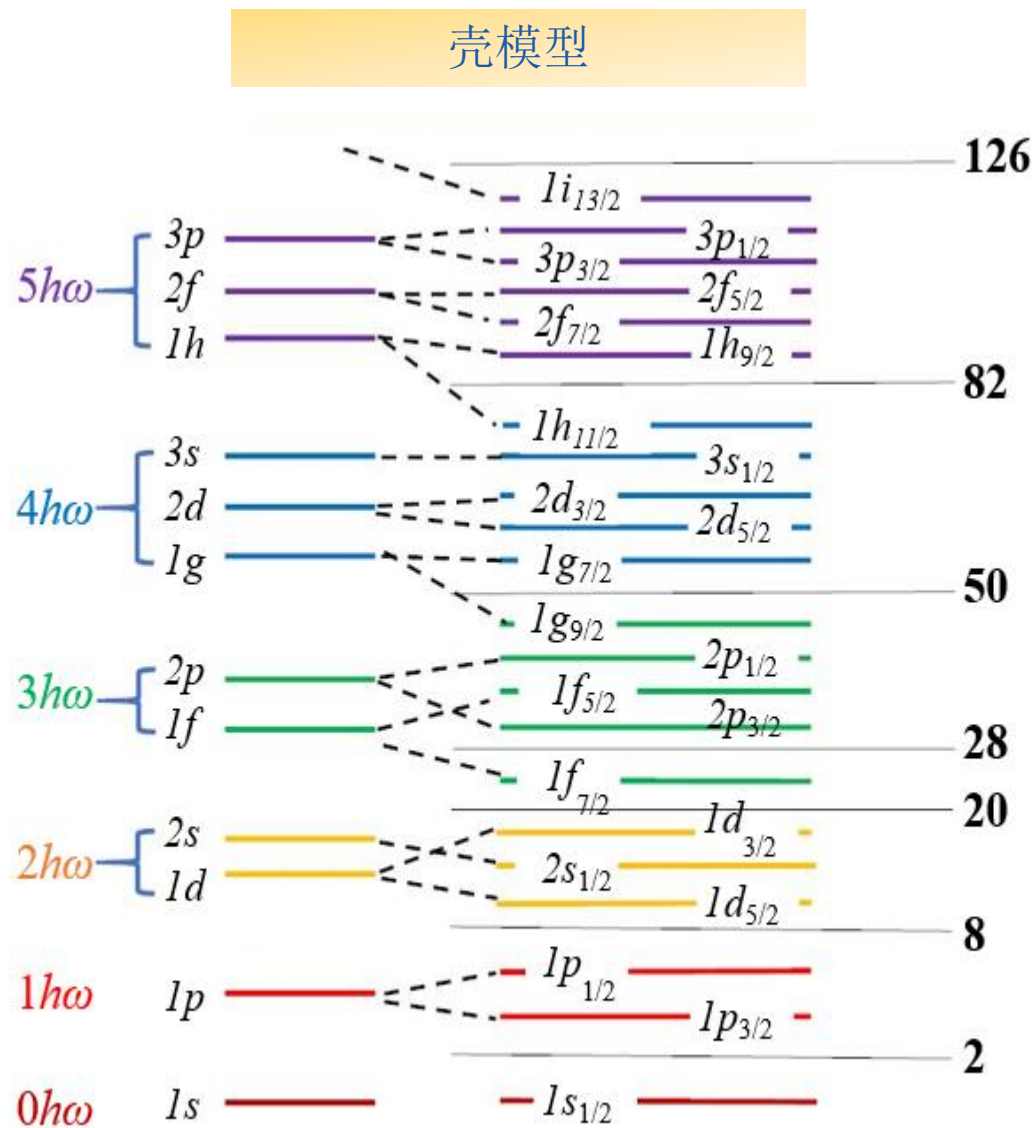
壳模型成功的给出了原子核的幻数：2，8，20，28，50，82，126。具有幻数核子的原子核表现出稳定的特征：

球形基态、较高的 $E(2_1^+)$ 能量和较小的 $B(E2)$ 值等。

✓ 幻数的消失

后来实验发现幻数核附近的壳效应在远离稳定线附近慢慢减弱甚至消失。原子核具有不同于稳定区的结构和性质：

反常大形变、小的 $E(2_1^+)$ 能量和大的 $B(E2)$ 值等。



- ✓ 核素图中闭合壳层消失的第一个迹象出现在中子幻数 $N = 20$ 附近。

【C. Thibault, et al., Phys. Rev. C 12, 644 (1975).】

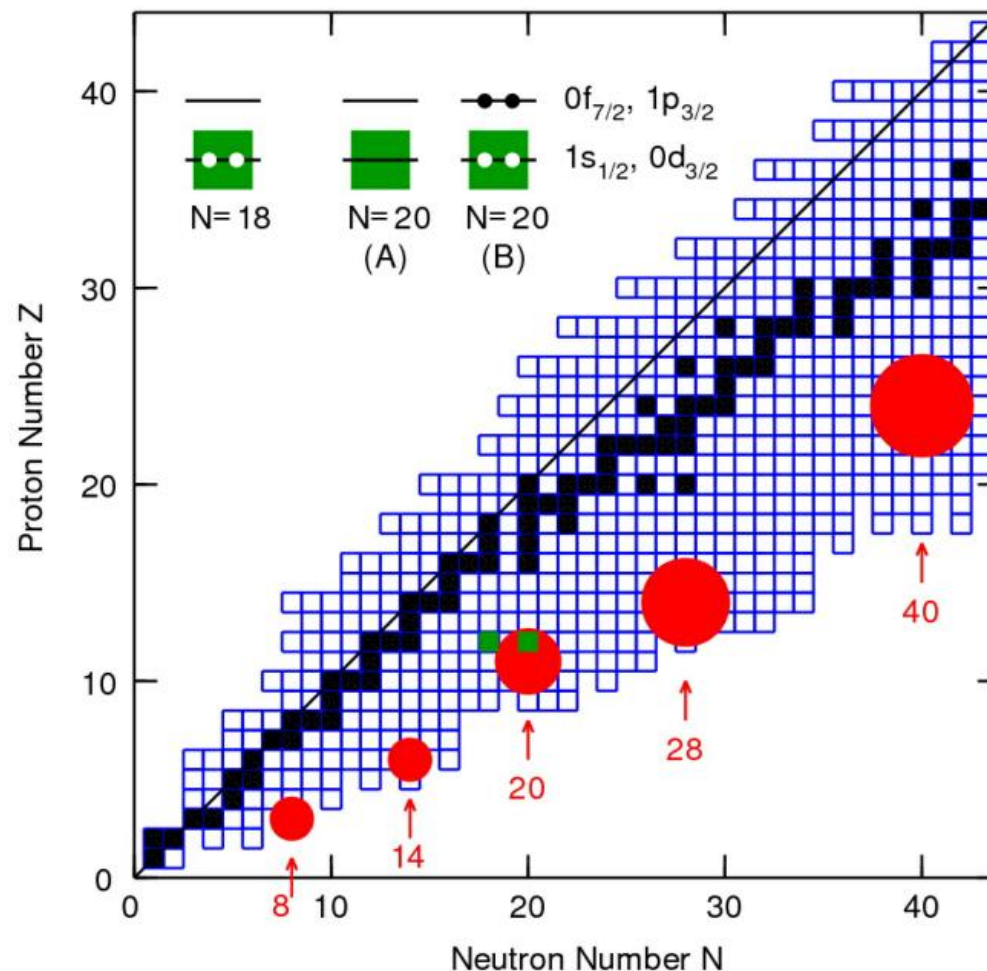
- ✓ “反转岛” (Island of inversion, IOI) 概念的出现。

【E. K. Warburton, et al., Phys. Rev. C 41, 1147 (1990).】

该区域正宇称 sd 壳与负宇称 fp 壳的强烈混合， $N=20$ 闭合壳层消失。原子核基态的核子不是填充在正常的 sd 能级而是填充在闯入的 pf 能级上，闯入能级在基态中占据着主导地位。

- ✓ $N = 8, 14, 20, 28, 40, 50$ 的反转岛区域已经被提出。

在不稳定原子核的“海洋”中形成一个个群岛!



【B. Alex Brown, Physics, 3, 104 (2010).】

- ✓ 随着 $N = 20$ 壳隙附近丰中子核中第一个反转岛的发现，引发了一系列的实验和理论研究。
实验方法： γ 射线能谱， β 衰变，敲除反应… 重点研究电荷半径，原子质量和核光谱…
理论方法：各种壳模型（投影壳模型，变分壳模型，蒙特卡罗壳模型…），自洽平均场计算（Hartree-Fock, Hartree-Fock- bogoliubov, 相对论平均场…），超越平均场…
- ✓ 对反转岛潜在物理特性的全面的、普遍的理解仍然没有完善。【N. Kitamura, et al., Phys. Rev. C, 105, 034318 (2022).】

- 基于相对论平均场理论(RMF)
- 采用复动量表像(CMR)方法求解Dirac方程

研究从 $N = 8$ 附近的小“岛”到以 ^{64}Cr ($N = 40$)为中心的更大的反转岛区域。重点关注幻数的消失，并对壳演化、形变和闯入态的构型提供系统的探索。



安徽大學
Anhui University

02

Part Two

理论框架

Theoretical Framework

➤ 复动量表象 (CMR) 理论

在 RMF 理论中, 核子被描述为在平均场中运动的狄拉克粒子, 其狄拉克方程可以写成:

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(M + S) + V = \begin{pmatrix} M + V + S & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -M + V - S \end{pmatrix} \quad (1)$$

为了得到包含束缚态和共振态的解, 将上式转化为动量空间中的形式:

$$\int d\vec{k}' \langle \vec{k} | H | \vec{k}' \rangle \psi(\vec{k}') = \varepsilon \psi(\vec{k}) \quad (2)$$

总角动量的第三分量 m_j 是好量子数, 狄拉克旋量可以表示为:
$$\psi(\vec{k}) = \begin{pmatrix} f(k) \phi_{l_j m_j}(\Omega_k) \\ g(k) \phi_{\bar{l}_j m_j}(\Omega_k) \end{pmatrix} \quad (3)$$

狄拉克方程就变成:

$$\begin{cases} Mf(k) - kg(k) + \int k'^2 dk' V_+(k, k') = \varepsilon f(k) \\ -kf(k) - Mg(k) + \int k'^2 dk' V_-(k, k') = \varepsilon g(k) \end{cases} \quad (4)$$

其中: $V_+(k, k') = \frac{2}{\pi} \int r^2 dr [V(r) + S(r)] j_l(k'r) j_l(kr)$ $V_-(k, k') = \frac{2}{\pi} \int r^2 dr [V(r) - S(r)] j_{\bar{l}}(k'r) j_{\bar{l}}(kr)$

平均场势分别由 $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$ 和 $\Delta(r) = V(r) - S(r)$ 来表示。

利用高斯求积公式，方程④可以转化为：

$$\begin{cases} Mf^{lj}(k_a) - k_a g^{lj}(k_a) + \sum_{l'j'} \sum_{b=1}^N \omega_b k_b^2 V^+(l', j', p, q, l, j, m_j, k_a, k_b) f^{l'j'}(k_b) = \varepsilon f^{lj}(k_a) \\ -k_a f^{lj}(k_a) - Mg^{lj}(k_a) + \sum_{l'j'} \sum_{b=1}^N \omega_b k_b^2 V^-(\tilde{l}', j', p, q, \tilde{l}, j, m_j, k_a, k_b) g^{l'j'}(k_b) = \varepsilon g^{lj}(k_a) \end{cases} \quad \textcircled{5}$$

在复动量空间中求解方程⑤，可同时得到束缚态和共振态。

坐标表象中波函数表示为：

$$\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} \int k^2 dk i^l j_l(kr) f(k) \phi_{ljm_j}(\Omega_r) \\ \int k^2 dk i^{\tilde{l}} j_{\tilde{l}}(kr) f(k) \phi_{ljm_j}(\Omega_r) \end{pmatrix} \quad \textcircled{6}$$

其中径向分量为：

$$f^{lj}(r) = i^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{a=1}^N \omega_a k_a^2 j_l(k_a r) f^{lj}(k_a) \quad \textcircled{7}$$

$$g^{lj}(r) = i^{\tilde{l}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{a=1}^N \omega_a k_a^2 j_{\tilde{l}}(k_a r) g^{lj}(k_a)$$

【Z. Fang, et al., Phys. Rev. C 95, 024311(2017).】

坐标空间中的径向密度定义为：

$$\rho_{m_j}(r) = \sum_{lj} [f^{lj}(r) f^{lj}(r) + g^{lj}(r) g^{lj}(r)] \quad \textcircled{8}$$

核的势场采用如下形式:

$$V(r) = V_0 f(r) - \beta_2 V_0 k(r) Y_{20}(\vartheta, \varphi)$$

$$\text{其中: } f(r) = \frac{1}{1 + \exp[(r-R)/a]}, \quad k(r) = \frac{r df(r)}{dr}$$

$V(r)$ 可以表示标量势或矢量势。 V_0 表示势阱深度， a 表示弥散参数， r 表示势场的范围， R 表示原子核半径。

势的参数通过拟合使用NL3有效相互作用的相对论平均场(RMF)计算得到的自洽微观势来确定。

【Alberto P, et al., Phys. Rev. Lett. 86, 5015 (2001).】

【Alberto P, et al., Phys. Rev. C 65, 034307 (2002).】



安徽大學
Anhui University

03

Part Three

结果与分析

Results and Analysis

1. N=8的反转岛

- 轻的、丰中子的不稳定原子核的壳层结构往往与稳定原子核的壳层结构不同，这提供了有趣的研究机会。
- 丰中子的铍(Be)同位素位于N=8的反转岛处，是探索不稳定原子核新特征的绝佳候选者。
- 单中子晕核 ^{11}Be 中的宇称反转是一个值得研究的重要现象。

以 ^{11}Be 为例，深入研究其偶宇称基态和晕形成的潜在机制。

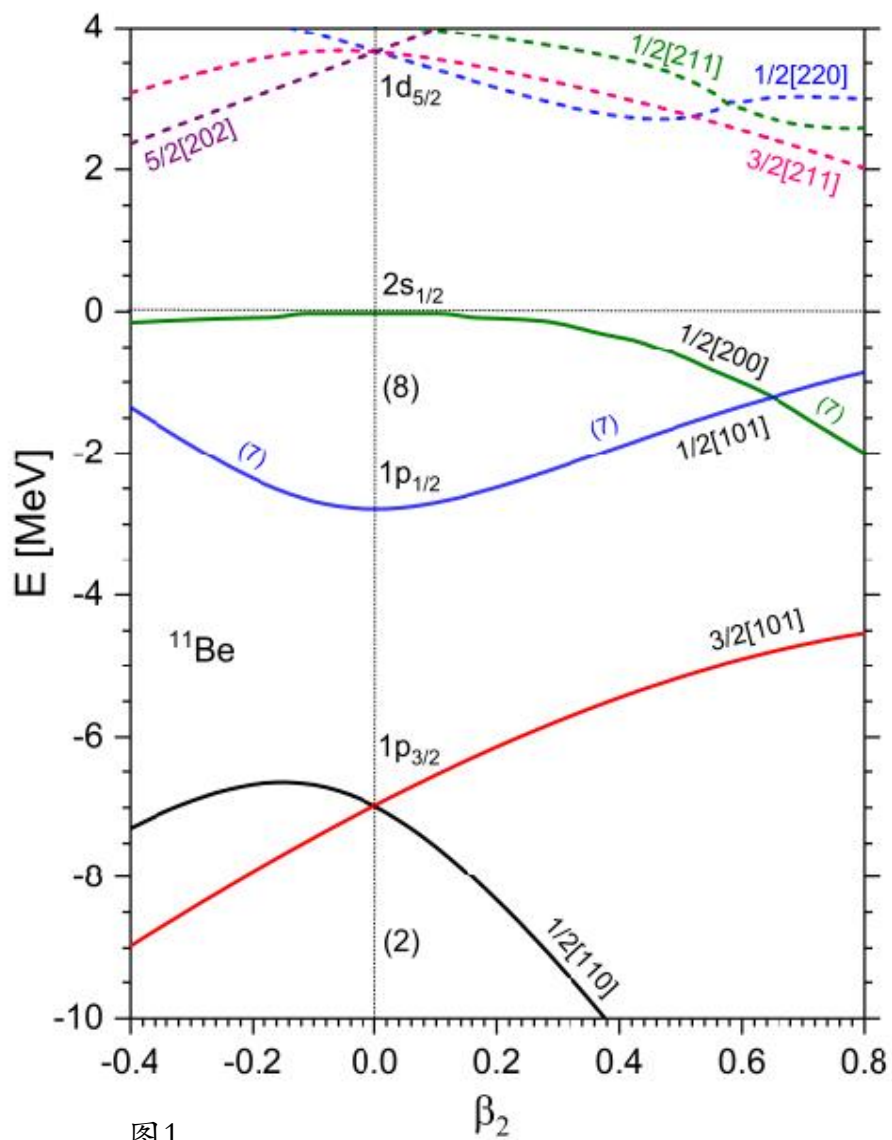


图1

1. 球形 ($\beta_2 = 0$)

- ✓ 弱束缚态 $2s_{1/2}$ 意外地出现在 $1p_{1/2}$ 和 $1d_{5/2}$ 之间。
 ^{11}Be 单粒子能级的 s-d 反转导致 $N=8$ 壳间隙的显著减小。
- ✓ ^{11}Be 最外层的价中子在球形的情况下占据了 $1p_{1/2}$ 轨道。 ^{11}Be 具有 $1/2^-$ 基态。

^{11}Be 的基态不是人们期望的 $1/2^-$ 态，而是 $1/2^+$ 态。
表明球形不适合描述 ^{11}Be ，它可能是一个形变核。

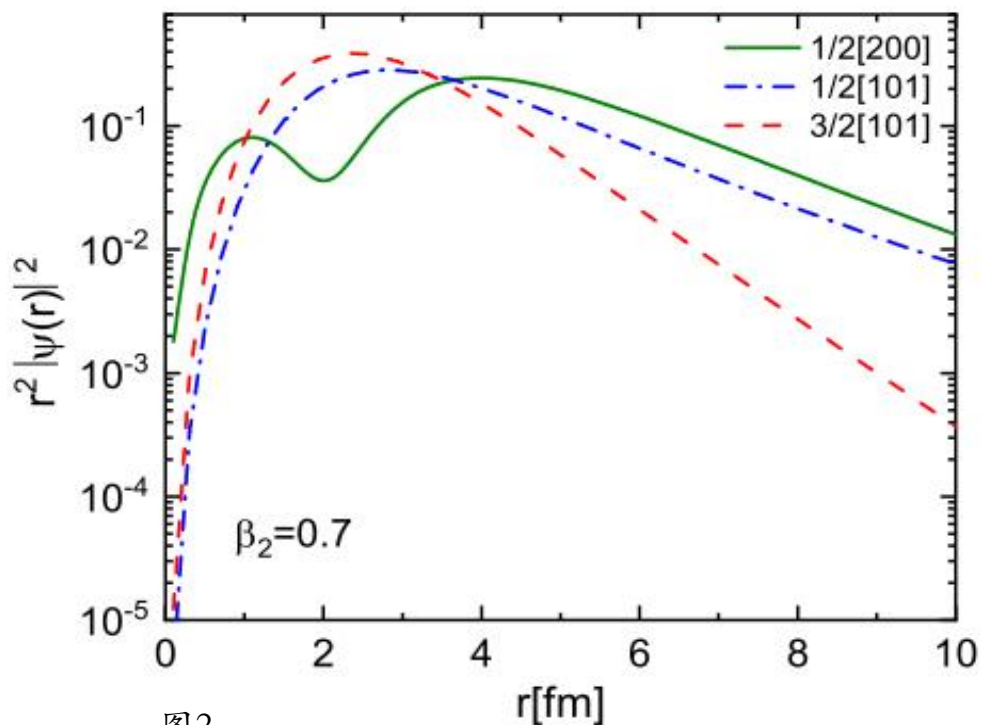
【P. F. Donovan, et al., Phys. Rev. 123, 589 (1961).】

【D. E. Alburger, et al., Phys. Rev. 136, B916 (1964).】

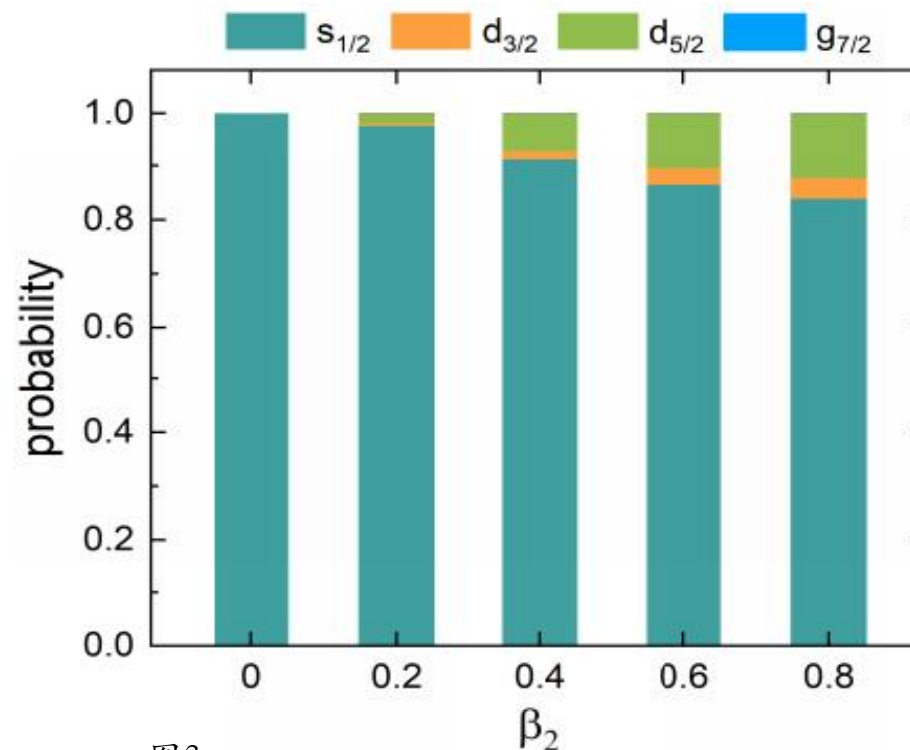
2. 形变 ($\beta_2 \neq 0$)

- ✓ 在 $-0.4 \leq \beta_2 \leq 0$ 和 $0 \leq \beta_2 \leq 0.65$ 范围内，最后一个中子可能占据在 $1/2[101]$ 能级。不符合关于 ^{11}Be 基态自旋宇称的实验观察。
- ✓ $\beta_2 > 0.65$ 时，最后一个中子可能占据 $1/2[200]$ 能级，导致 ^{11}Be 表现出有效的正宇称，这与实验观察结果一致。

^{11}Be 可能具有 $\beta_2 > 0.65$ 的形变值。



- ✓ 1/2[200]能级的径向密度分布相比相邻的束缚能级1/2[200]和3/2[101]更加弥散，更容易形成晕结构。
- ✓ 当价中子占据1/2[200]能级时，径向密度分布证实了晕存在的可能性。



- ✓ 在考虑的形变范围内， $s_{1/2}$ 分量的占据概率仍然占主导地位。 $\beta_2 > 0.65$ 时，1/2[200]能级主要由s波分量组成。
- ✓ 由于s波没有离心势垒，弱束缚的1/2[200]能级支持晕的形成。

■ 综合以上结果，推断 ^{11}Be 可能是一个 $\beta_2 > 0.65$ 的长椭晕核。

✓ 幻数N=8出现在原子核的任何唯象平均场的描述中。
即1p态和2s1d态会很好得分离。

✓ 随着质子陆续离开1p_{3/2}轨道，N=8间隙显著减小。
【O. Sorlin and M. G. Porquet, Prog. Part. Nucl. Phys.61, 602 (2008).】

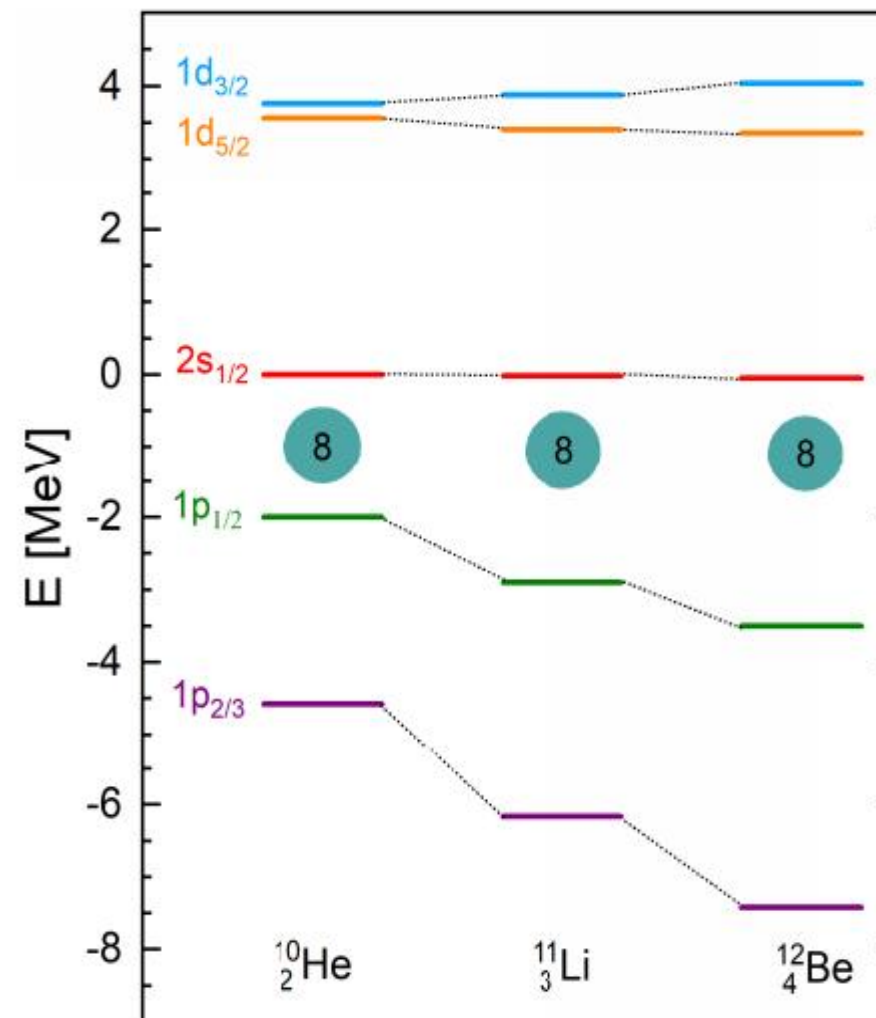
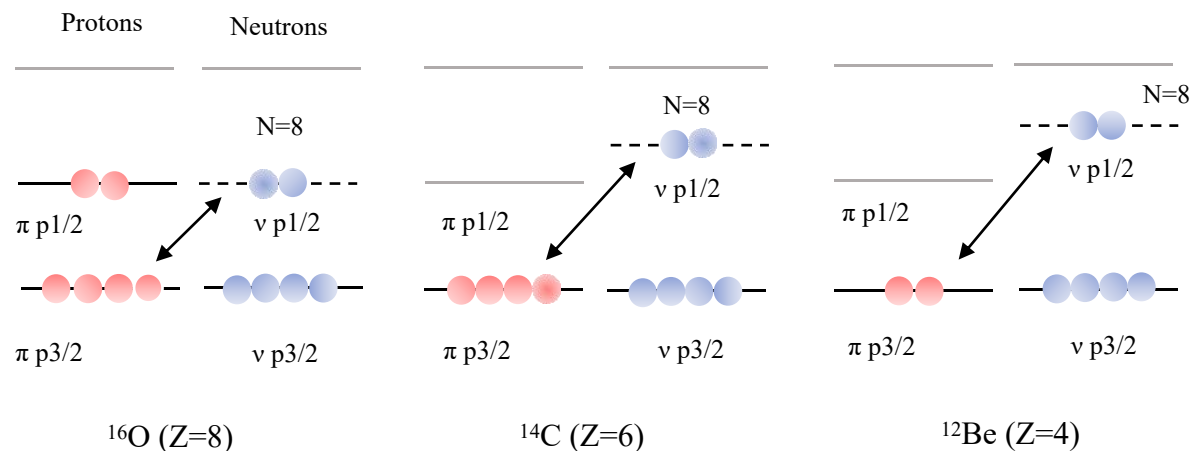


图4 $\beta_2 = 0$ 时, ^{10}He 、 ^{11}Li 和 ^{12}Be 的单粒子能量

2. N=20的反转岛

- N=20的反转岛主要由丰中子Ne、Na和Mg的同位素组成。
- 该区域的特征是由形变相关的中子粒子-空穴从sd壳层激发到pf壳层(闯入者构型)，跨越N=20的壳层间隙。闯入者构型在能量上比正常构型更有利，主导原子核的基态。
- 原子核 ^{33}Mg (N = 21, Z = 12)位于N=20 IOI内, 其结构近年来一直是激烈争论的话题。最近的实验明确地证实了 ^{33}Mg 具有 $3/2^-$ 的基态。

我们使用CMR方法进一步探索 ^{33}Mg 的奇特结构，从而为N = 20 IOI提供新的线索。

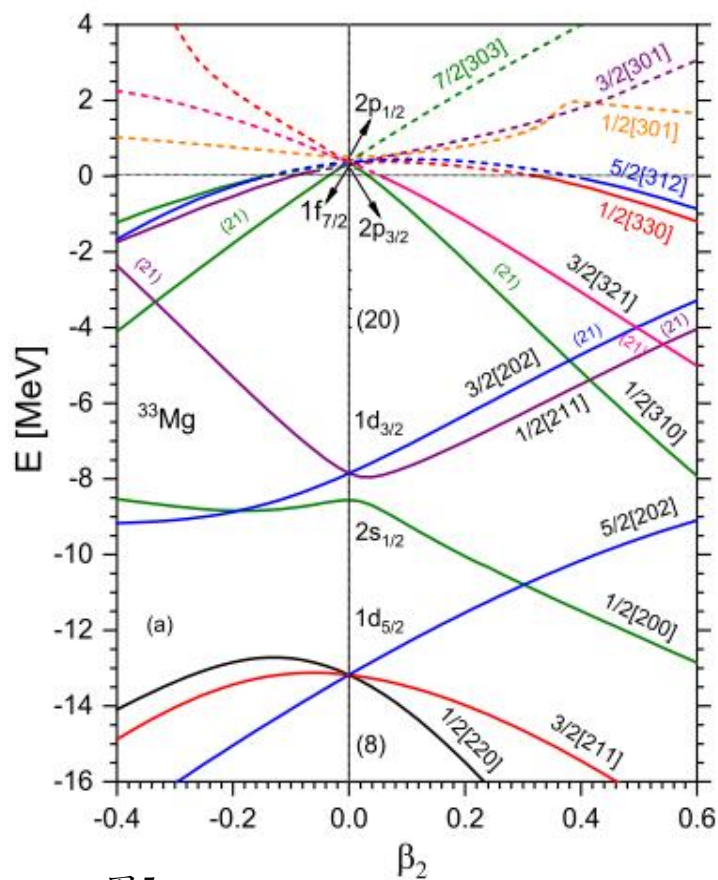
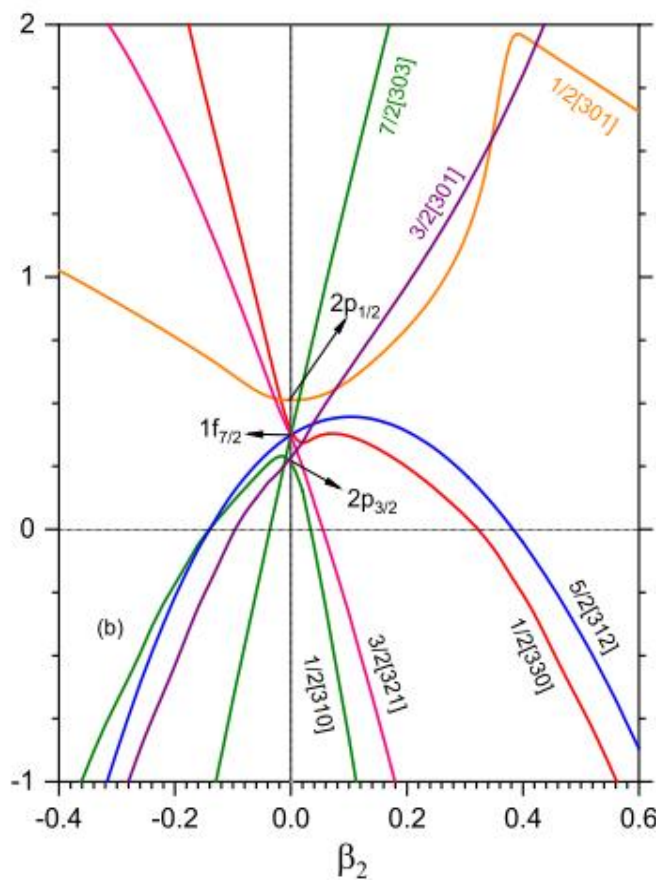


图5



■ $^{33}\text{Mg}: J^\pi=3/2^-$

【D. Bazin, et al., Phys. Rev. C 103, 064318 (2021).】

对应图中 $0.49 \leq \beta_2 \leq 0.55$ 时的 $3/2[321]$ 轨道。

【D. T. Yordanov, et al., Phys. Rev. Lett. 99, 212501 (2007).】

✓ $2p_{3/2}$ 能级位于 $1f_{7/2}$ 能级以下，在 ^{33}Mg 中， $\beta_2 = 0$ 处 $N = 28$ 能隙消失，这可能是丰中子Mg同位素的一个特征。

✓ $2p_{1/2}$ 、 $2p_{3/2}$ 和 $1f_{7/2}$ 能级具有近简并性。利用这种简并性，在形变发生时降低pf壳层的能量。Jahn-Teller效应可以引起 $N \approx 21-28$ 的原子核产生形变。【H. A. Jahn and E. Teller, Proc. R. Soc. A 161, 220(1937).】

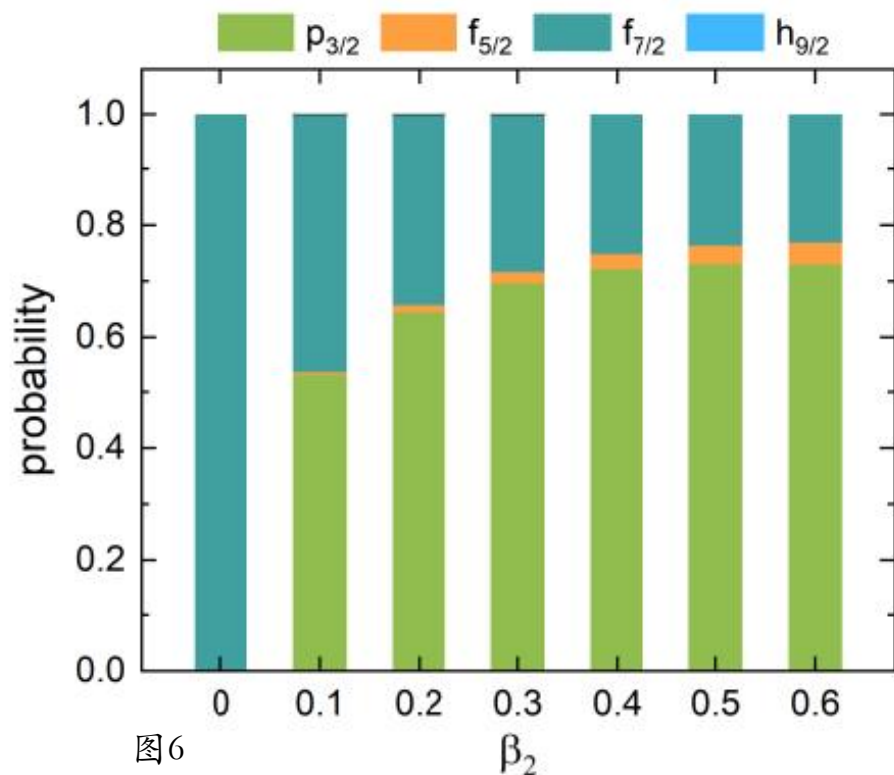


图6

- ✓ 随着变形参数 β_2 的增大, $f_{7/2}$ 的占据概率逐渐减小, 而 $p_{3/2}$ 的占据概率逐渐增大。
- ✓ 在 $0.49 \leq \beta_2 \leq 0.55$ 时, $p_{3/2}$ 的占据概率超过70%, 表明闯入者构型 $p_{3/2}$ 最终成为3/2 [321]轨道内的优势构型。

【R. Kanungo, et al., Phys. Lett. B 685, 253(2010).】

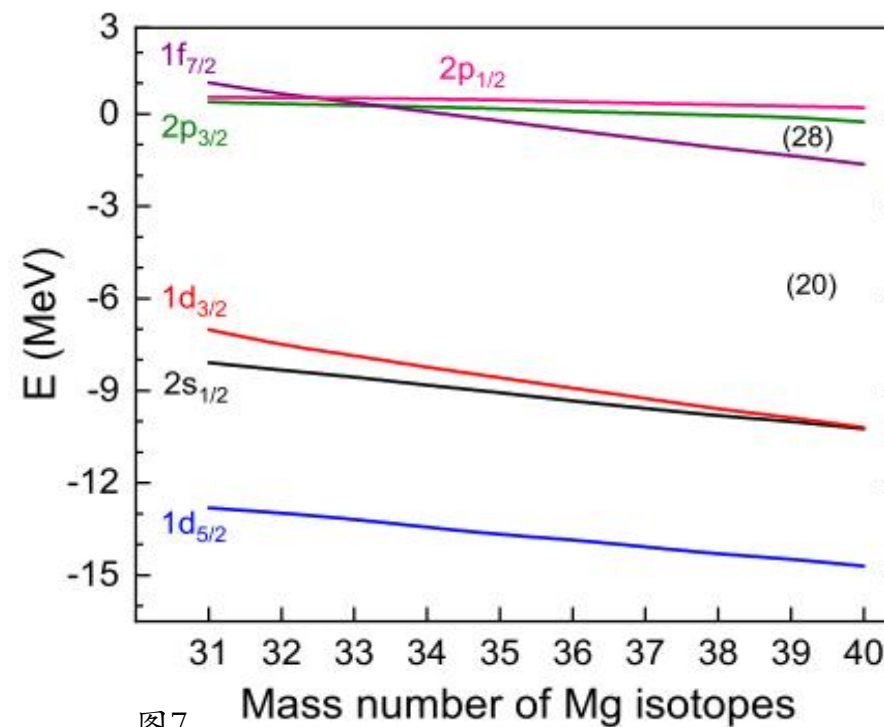


图7

- ✓ $^{31-34}\text{Mg}$ 中, 当球对称被破坏时, 源自pf壳层的Nilsson能级迅速下降, N=20的能隙消失。
- ✓ 丰中子镁同位素中 $\beta_2 = 0$ 时N=28处的能隙消失。
- N=20和N=28 IOI或形变在镁同位素链中合并。导致了“大的形变岛” (Big Island of Deformation, BID) 的出现。

3. N=28的反转岛

- N = 28的主壳隙是由 $\nu f_{5/2}$ - $\nu f_{7/2}$ 自旋轨道分裂决定的。N = 28附近的轨道序列由两对自旋轨道伙伴态 $f_{7/2}$ 、 $p_{3/2}$ 、 $p_{1/2}$ 和 $f_{5/2}$ 组成。壳层闭合的存在与否与自旋轨道力的演化密切相关。
- 通过 β 衰变、精确质量测量和库仑激发等方法揭示了 ^{48}Ca “南部”的N = 28壳层效应迅速减弱。建立了N=28的反转岛。

^{42}Si 位于N=28的IOI中心，在研究核壳结构及其与传统壳层模型的偏差方面起着至关重要的作用。

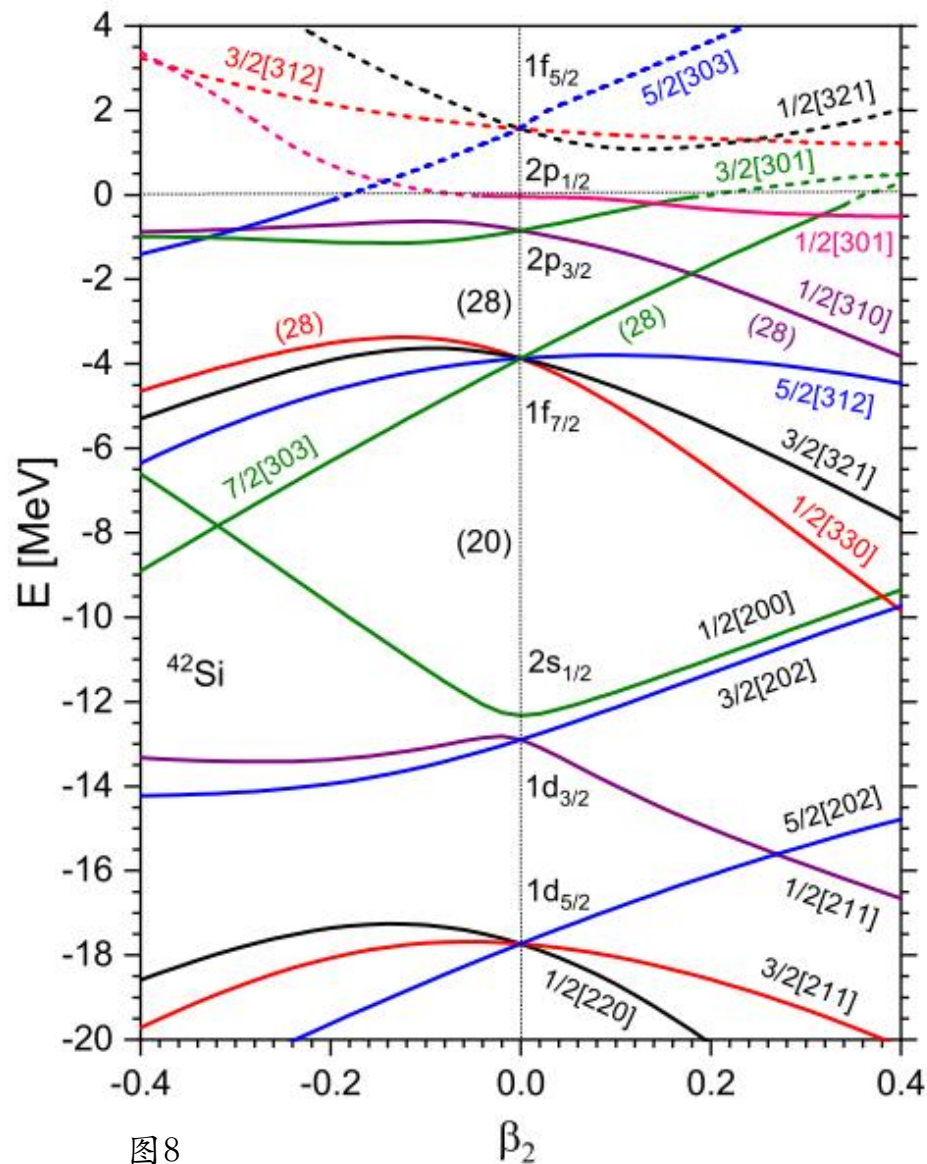


图8

1. 球形 ($\beta_2 = 0$)

- ✓ 左图中 $\beta_2 = 0$ pf壳层间隙为3.0 MeV, 可能表明 ^{42}Si 可能是一个幻核。
- ✓ 【Bastin, et al., Phys. Rev. Lett. 99, 022503(2007).】
表明了 ^{42}Si 中传统幻数 $N = 28$ 已被打破。

2. 形变 ($\beta_2 \neq 0$)

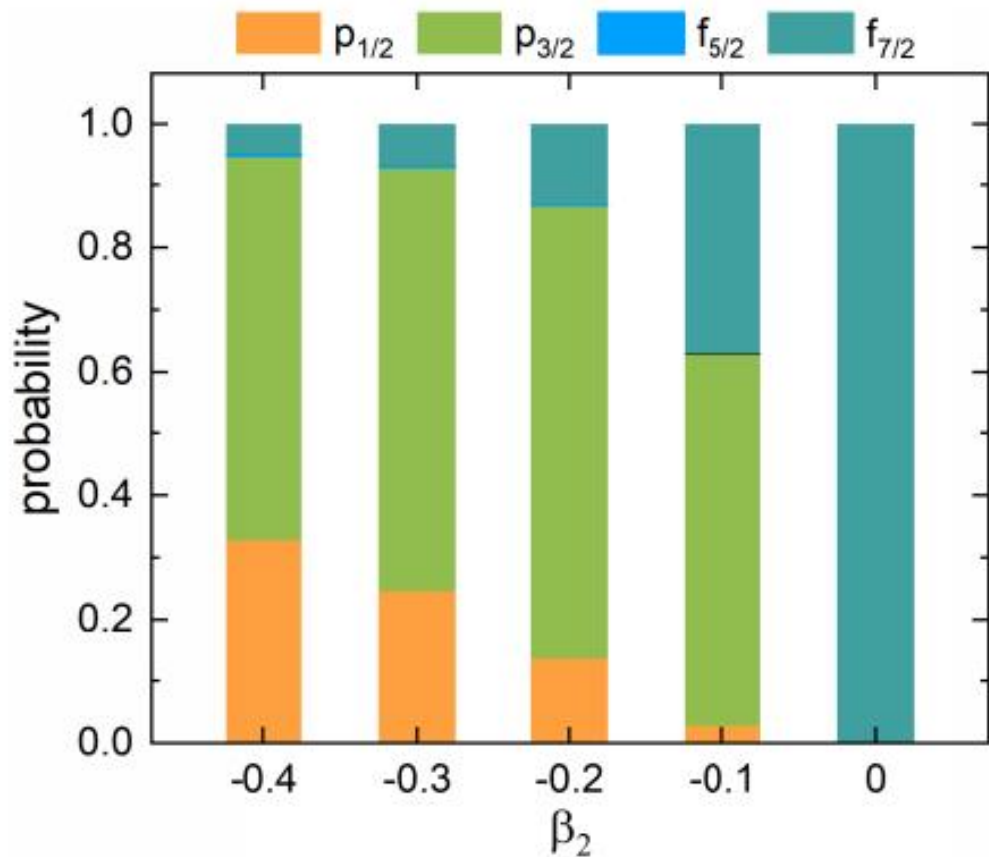
- ✓ 长椭圆形变 ($\beta_2 > 0$)
由球形的 $1f_{7/2}$ 和 $2p_{3/2}$ 壳层产生中子轨道有明显的反转。
- ✓ 扁椭圆形变 ($\beta_2 < 0$)
最后一个中子将占据在 $1/2[330]$ 能级, 没有中子能级交叉。 $N=28$ 的壳隙仍然存在。但对 $1/2[330]$ 轨道的占据几率进行分析时, 出现了有趣的趋势。

长椭? 扁椭?

- 对于 ^{42}Si , 中子费米能级的能量在 $-0.4 \leq \beta_2 \leq 0$ 范围内相对于 $\beta_2 \geq 0$ 时较低。
- 中子占据最高轨道能量的减少, 可以表现出更稳定的核构型。

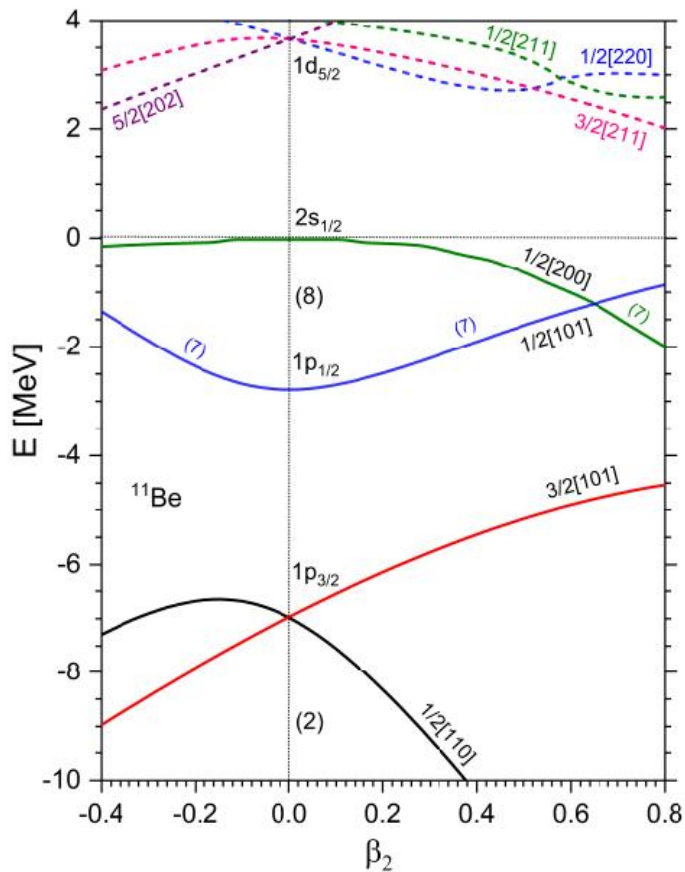
扁椭 (✓)

- 【B. Bastin, et al., Phys. Rev. Lett. 99, 022503(2007).】
- 【Z. P. Li, et al., Phys. Rev. C 84, 054304 (2011).】
- 【Y. Suzuki and M. Kimura, Phys. Rev. C 104, 024327(2021).】

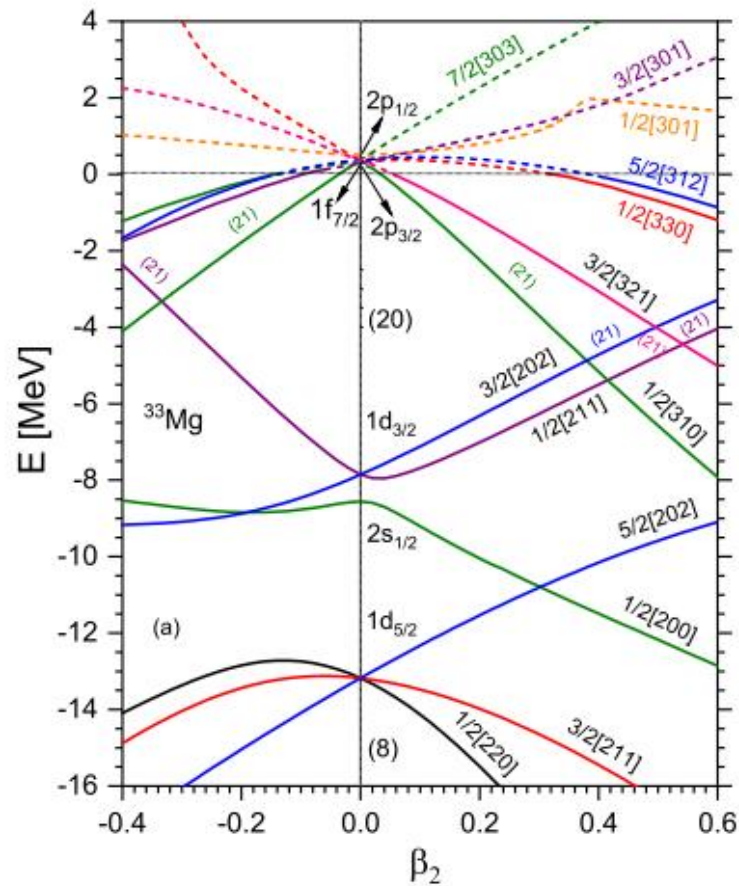


- ✓ 虽然 $1/2[330]$ 是由f壳层分裂出来的，但随着形变参数 β_2 的增大，p波 ($p_{1/2}$ 和 $p_{3/2}$)的占据概率逐渐增大。

图9 在 ^{42}Si 中，单粒子态 $1/2[330]$ 主要构型的占据概率

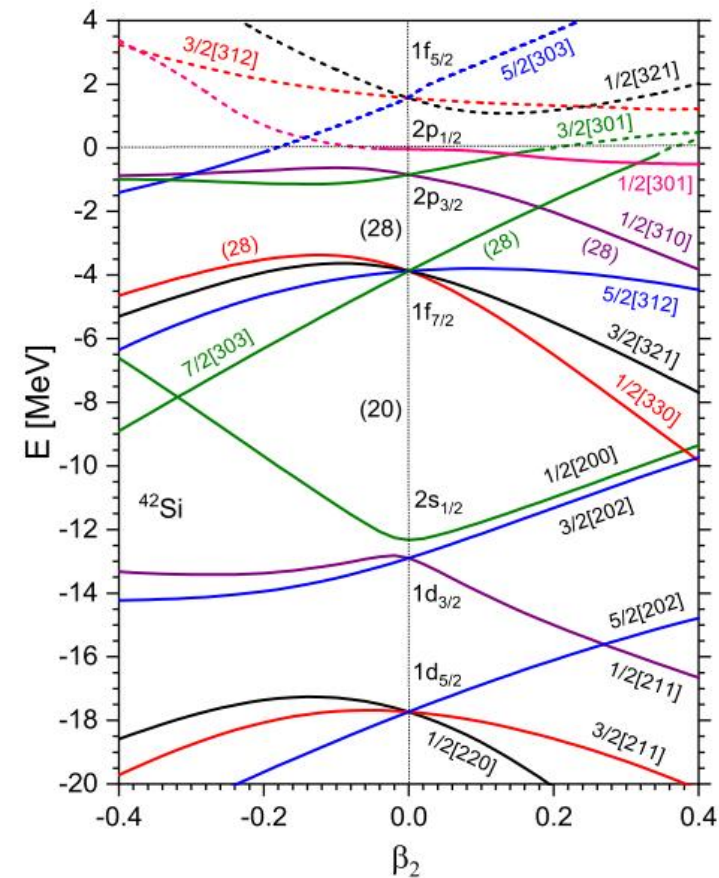


$$E(2s_{1/2}) < E(1d_{5/2}) < E(1d_{3/2})$$



$$E(1d_{5/2}) < E(2s_{1/2}) < E(1d_{3/2})$$

$$E(2p_{3/2}) < E(1f_{7/2}) < E(2p_{1/2}) < E(1f_{5/2})$$



$$E(1d_{5/2}) < E(1d_{3/2}) < E(2s_{1/2})$$

$$E(2p_{1/2}) < E(1f_{5/2})$$

■ 随着势场的减弱，与*l*值较大的能级相比，*l*值较小的能级向下移动。

4. N=40的反转岛

- 与N=20形变区域类似，N=40同位素的 $E(2_1^+)$ 态能量急剧下降，从 ^{68}Ni 的2034 keV下降到 ^{66}Fe 的574 keV和 ^{64}Cr 的430 keV。
- 当质子从 ^{68}Ni 中移除时， $f_{7/2}$ 和 $g_{9/2}$ 中子轨道之间相对较大的能隙减小甚至消失。由pf壳层以外的闯入中子轨道（中子 $g_{9/2}$ 和 $d_{5/2}$ 轨道）主导的形变基态，导致 $N \approx 40$ 原子核中集体性增加，从而形成新的IOI。

^{64}Cr 是N=40 IOI中心的关键核。分析Nilsson能级图和组态占据概率对于理解pf和sdg组态混合中的闯入者轨道结构至关重要。

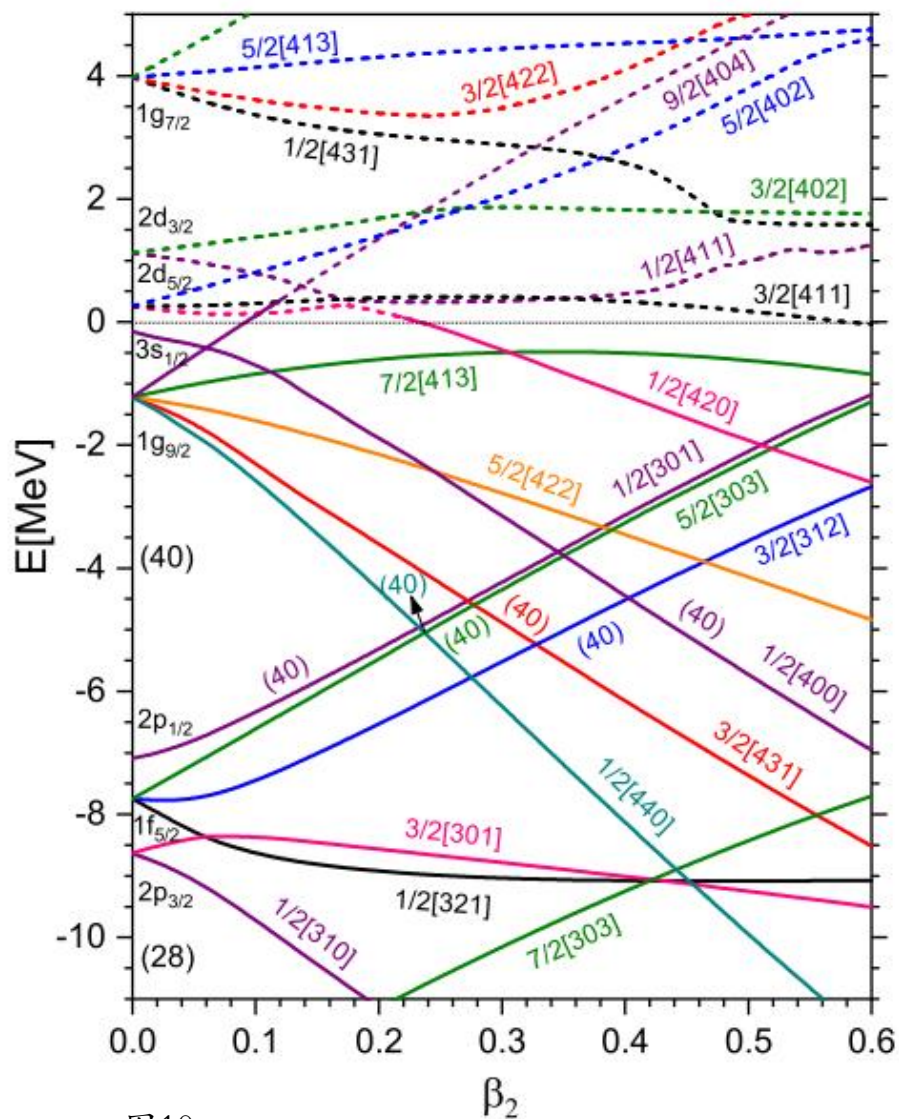
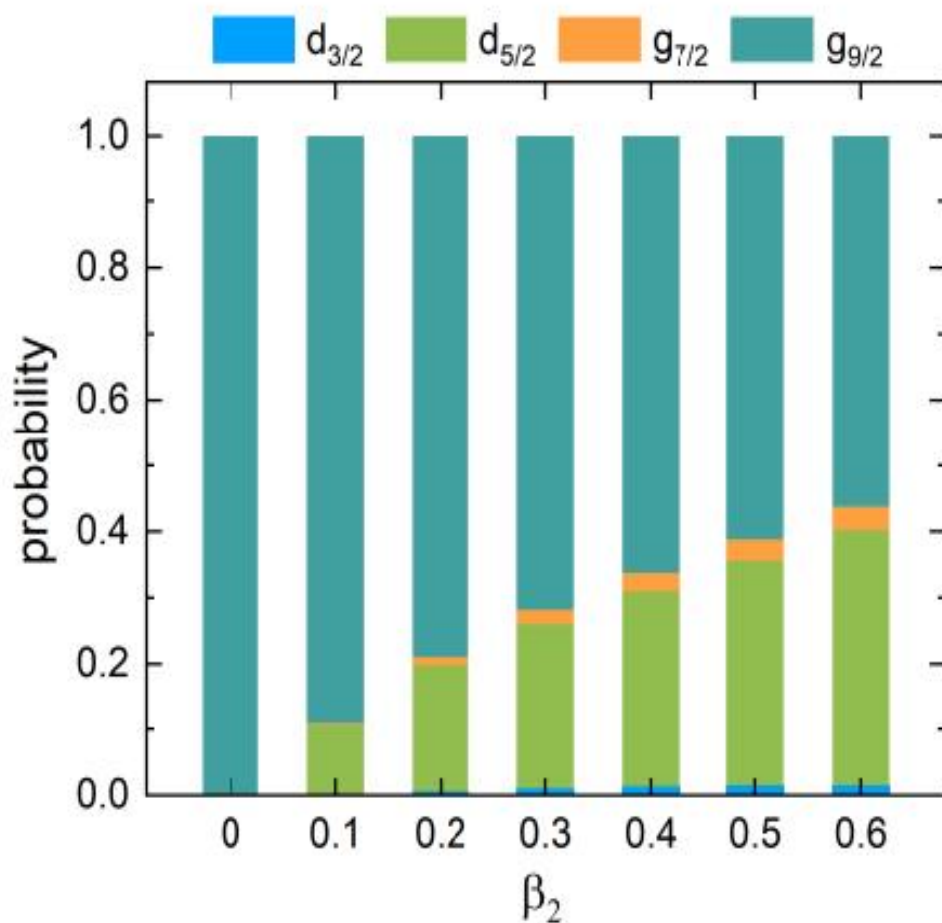


图10

- ✓ 属于sdg壳层的3个能级($1g_{9/2}$ 、 $3s_{1/2}$ 、 $2d_{5/2}$)在1.48 MeV以内, 说明幻数 $N=50$ 处能隙的消失。
- ✓ 与 $N=20$ IOI区域讨论的 $1f_{7/2}$ 和 $2p_{3/2}$ 类似, $1g_{9/2}$ 与其他两个能级的近简并表明可能存在另一个反转岛。
- ✓ 随着形变参数 β_2 从0到0.6, 由 $1g_{9/2}$ 和 $3s_{1/2}$ 形变分裂产生的 $\Omega=1/2$ 和 $3/2$ 轨道急剧减小, $N=40$ 的能隙消失, 最后一个价中子可能占据这些轨道。
- ✓ ^{64}Cr 的形变值测得为 $\beta_2=0.29$
【National Nuclear Data Center, <http://www.nndc.bnl.gov>】
- 对应图中 $0.28 \leq \beta_2 \leq 0.34$ 的范围。此时, ^{64}Cr 的最后一个价中子占据在闯入能级 $3/2[431]$ 上。

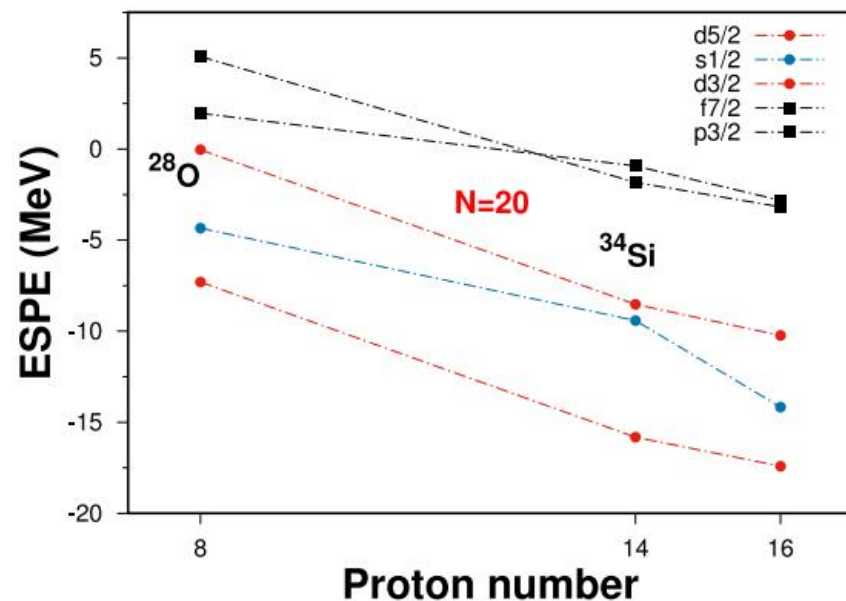
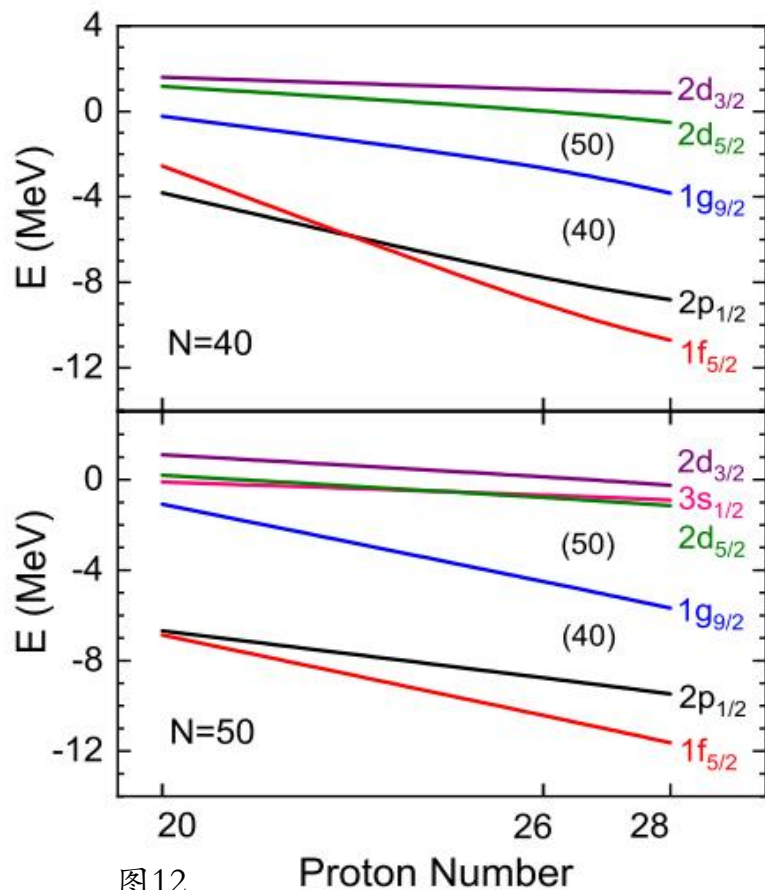


- ✓ 随着形变参数 β_2 从0增大到0.6, $g_{9/2}$ 分量的占据概率逐渐减小, 而 $d_{5/2}$ 分量的占据概率逐渐增大。
- ✓ 在本文所考虑的形变区间内, ^{64}Cr 的基态主要表现为 $g_{9/2}$ 状态。然而, 不能忽视共振能级 $d_{5/2}$ 对 $3/2[431]$ 能级的贡献。

【F. Nowacki, et al., Part. Nucl. Phys. 120, 103866 (2021).】

【J. Ljungvall, et al., Phys. Rev. C 81, 061301(R) (2010).】

图11 在 ^{64}Cr 中, 单粒子态 $3/2[431]$ 主要构型的占据概率



【F. Nowacki, et al., Part. Nucl. Phys. 120, 103866 (2021).】

✓ 在N= 50的情况下，观察到与N=20和N=40相同的壳层演化的趋势，中子 $1g_{9/2}-2d_{5/2}$ 能隙的减小从 ^{78}Ni 左右开始，伴随着 $2d_{5/2}$ 和 $3s_{1/2}$ 四极伙伴轨道的接近。

■ 关于N=40和N=50同位素中单粒子演化的观测结果为第五个IOI的预测提供了支持。

- ✓ 深入研究了在IOI中发现的丰中子核的迷人领域，研究了演化的壳结构。通过基于相对论平均场(RMF)理论，考虑四极形变的复动量表示(CMR)求解Dirac方程，系统而细致的研究了不同反转岛区域的壳层演化。我们得到了与原子核内部结构有关的基本物理量，如单粒子能级、轨道构型的占据概率和径向密度分布等。
- ✓ 首先探索了N=8时丰中子铍同位素的结构特征，突出了 ^{11}Be 中单中子能级的反转，从而减少了N=8的壳隙和晕的形成。
- ✓ 其次研究了N=20附近的壳层演化。重点研究了丰中子Ne、Na和Mg同位素的IOI原子核，特别研究了 ^{33}Mg ，揭示了显著的形变和闯入者构型影响壳层结构。揭示了镁同位素链中“大的形变岛(BID)”的合并，这是由N=20和N=28 IOI合并形成的。
- ✓ 进一步研究了 ^{42}Si 原子核中N=28的主壳层，揭示了核结构的复杂性质以及会有很多因素影响原子核中幻数存在。
- ✓ 最后在N=40IOI中，特别研究 ^{64}Cr ，强调了四极耦合和共振轨道对形成N=40IOI的重要性。在研究的弱束缚核中，强调了共振在产生奇异现象中的作用。最后讨论了N=50壳隙的形成及其影响，表明可能存在第五个IOI。



安徽大學
Anhui University

谢谢各位老师!



| 汇报人：魏亚蒙



| 指导老师：刘泉教授



| 汇报时间：2024/01/23

➤ 复动量表象 (CMR) 理论

在 RMF 理论中, 核子被描述为在平均场中运动的狄拉克粒子, 其狄拉克方程可以写成:

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(M + S) + V = \begin{pmatrix} M + V + S & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -M + V - S \end{pmatrix} \quad (1)$$

核的势场采用如下形式: $V(r) = V_0 f(r) - \beta_2 V_0 k(r) Y_{20}(\vartheta, \varphi)$ (2) 其中: $f(r) = \frac{1}{1 + \exp[(r-R)/a]}$, $k(r) = \frac{r df(r)}{dr}$

为了得到包含束缚态和共振态的解, 将上式转化为动量空间中的形式:

$$\int d\vec{k}' \langle \vec{k} | H | \vec{k}' \rangle \psi(\vec{k}') = \varepsilon \psi(\vec{k}) \quad (3)$$

总角动量的第三分量 m_j 是好量子数, 狄拉克旋量可以表示为: $\psi(\vec{k}) = \begin{pmatrix} f(k) \phi_{l_j m_j}(\Omega_k) \\ g(k) \phi_{\bar{l}_j m_j}(\Omega_k) \end{pmatrix}$ (4)

狄拉克方程就变成:

$$\begin{cases} Mf(k) - kg(k) + \int k'^2 dk' V_+(k, k') = \varepsilon f(k) \\ -kf(k) - Mg(k) + \int k'^2 dk' V_-(k, k') = \varepsilon g(k) \end{cases} \quad (5)$$

其中: $V_+(k, k') = \frac{2}{\pi} \int r^2 dr [V(r) + S(r)] j_l(k'r) j_l(kr)$ $V_-(k, k') = \frac{2}{\pi} \int r^2 dr [V(r) - S(r)] j_{\bar{l}}(k'r) j_{\bar{l}}(kr)$

平均场势分别由 $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$ 和 $\Delta(r) = V(r) - S(r)$ 来表示。

利用高斯求积公式，方程⑤可以转化为：

$$\begin{cases} Mf^{lj}(k_a) - k_a g^{lj}(k_a) + \sum_{l'j'} \sum_{b=1}^N \omega_b k_b^2 V^+(l', j', p, q, l, j, m_j, k_a, k_b) f^{l'j'}(k_b) = \varepsilon f^{lj}(k_a) \\ -k_a f^{lj}(k_a) - M g^{lj}(k_a) + \sum_{l'j'} \sum_{b=1}^N \omega_b k_b^2 V^-(\tilde{l}', j', p, q, \tilde{l}, j, m_j, k_a, k_b) g^{l'j'}(k_b) = \varepsilon g^{lj}(k_a) \end{cases} \quad \textcircled{6}$$

在复动量空间中求解方程⑥，可同时得到束缚态和共振态。

坐标表象中波函数表示为：

$$\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} \int k^2 dk i^l j_l(kr) f(k) \phi_{ljm_j}(\Omega_r) \\ \int k^2 dk i^{\tilde{l}} j_{\tilde{l}}(kr) f(k) \phi_{\tilde{l}jm_j}(\Omega_r) \end{pmatrix} \quad \textcircled{7}$$

其中径向分量为：

$$\begin{aligned} f^{lj}(r) &= i^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{a=1}^N \omega_a k_a^2 j_l(k_a r) f^{lj}(k_a) \\ g^{lj}(r) &= i^{\tilde{l}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{a=1}^N \omega_a k_a^2 j_{\tilde{l}}(k_a r) g^{lj}(k_a) \end{aligned} \quad \textcircled{8}$$

【Z. Fang, et al., Phys. Rev. C 95, 024311(2017).】

坐标空间中的径向密度定义为：

$$\rho_{m_j}(r) = \sum_{lj} [f^{lj}(r) f^{lj}(r) + g^{lj}(r) g^{lj}(r)]$$

在不丢失普遍性的情况下，采用以下形式的Woods-Saxon势：

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + [\exp(r - R)/a]}$$

V_0 表示势阱深度， a 表示弥散参数， r 表示势场的范围， R 表示原子核半径。

这些参数通过拟合使用NL3有效相互作用的相对论平均场(RMF)计算得到的自洽微观势来确定。

【Alberto P, et al., Phys. Rev. Lett. 86, 5015 (2001).】

【Alberto P, et al., Phys. Rev. C 65, 034307 (2002).】