



第一届安徽省核物理研讨会  
2024.1.21 -2024.1.24

# 奇中子原子核摇摆运动的研究

**戴华名**

指导老师：陈启博 研究员

合作者：周先荣 教授

华东师范大学



# 目录

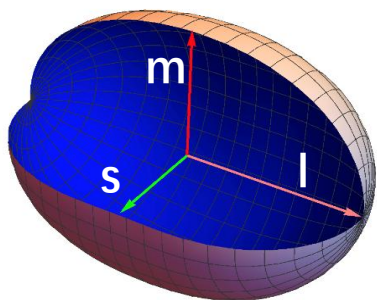
- 引言
- 形状因素对摇摆运动的影响
- $N=59$ 同中子链摇摆候选核的寻找
- 总结

## 摇摆运动

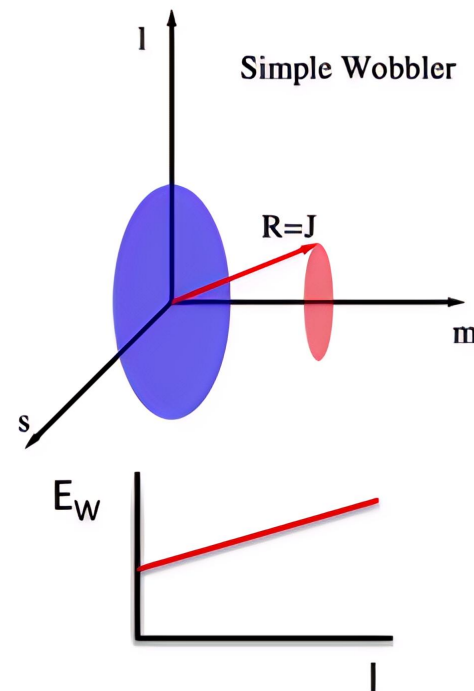
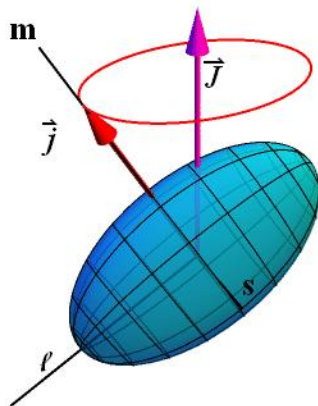
摇摆运动是三轴形变原子核中一种特殊的转动模式。原子核受到激发时，它的旋转轴会偏离转动惯量最大的轴，这就是**摇摆运动**。

*Bohr & Mottelson 1975, Nuclear structure, Vol. II, page 190*

### ■ 偶偶核中摇摆运动



三轴形变

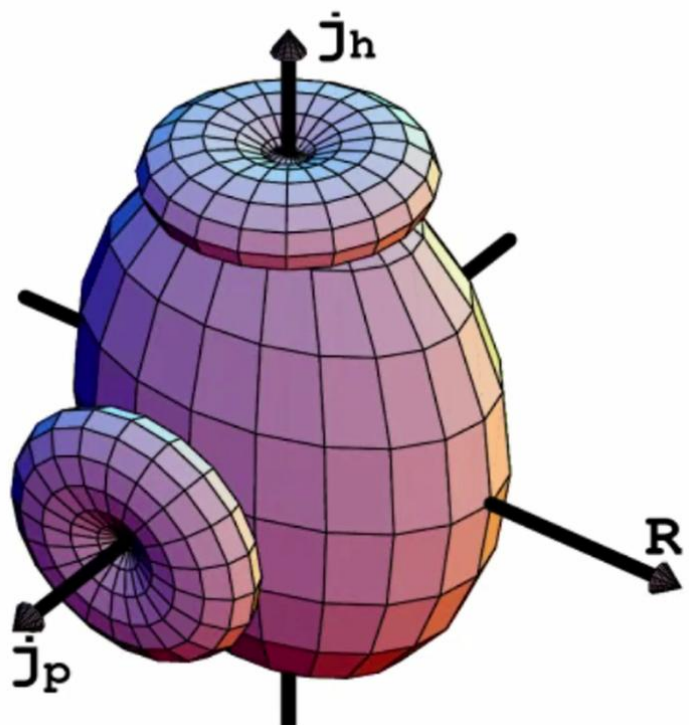


### 简单摇摆:

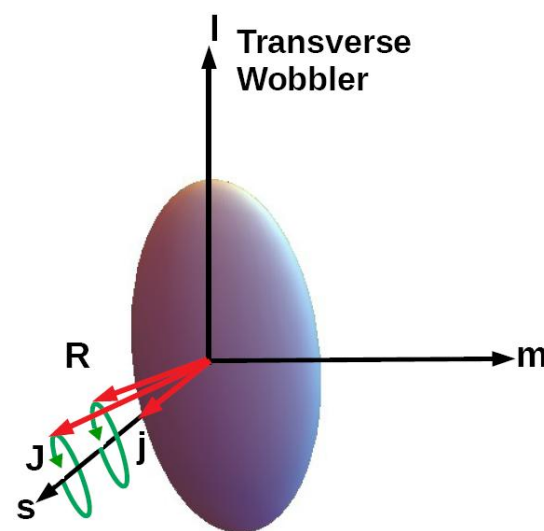
三轴形变转子的转轴偏离具有最大转动惯量轴的转动

摇摆能量:  $\hbar\omega = 2I[(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)]^{1/2}$

## ■ 奇A核中摇摆运动

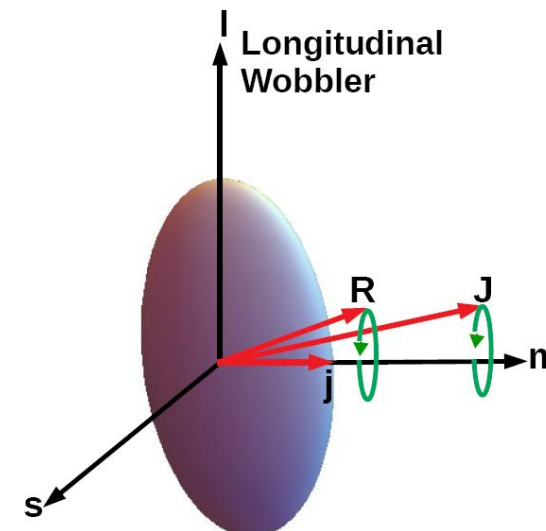


三轴转子耦合价核子或空穴



### 横向摇摆:

价核子角动量垂直于转动惯量最大的轴

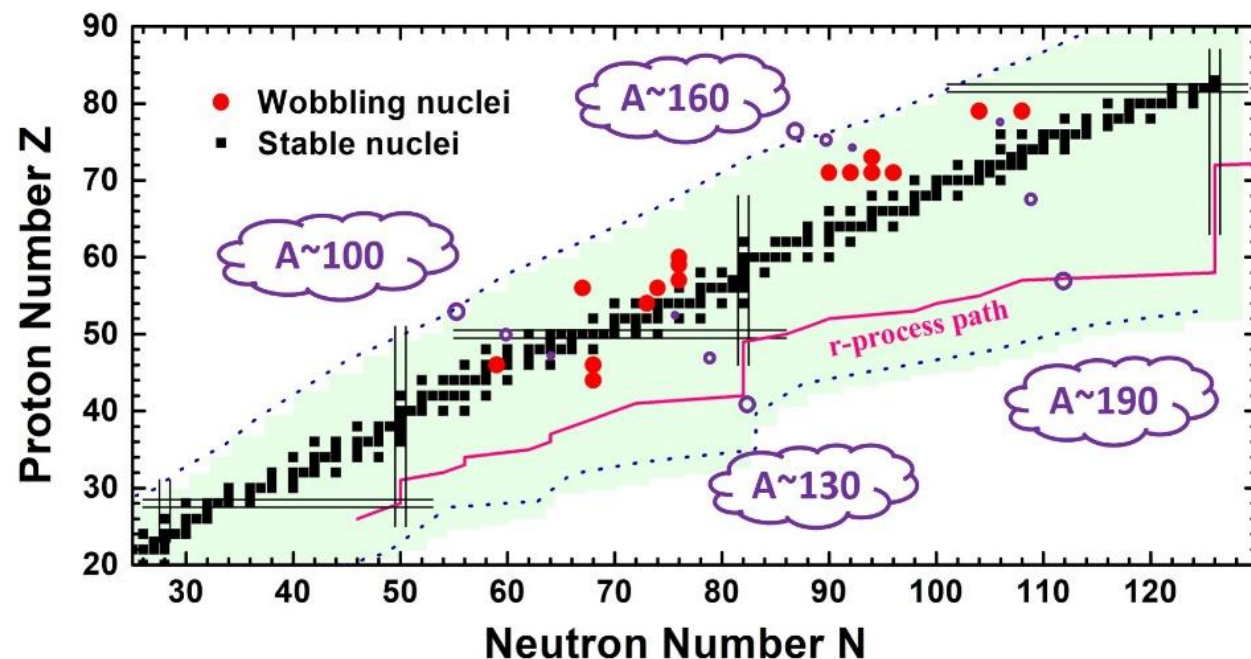


### 纵向摇摆:

价核子角动量平行于转动惯量最大的轴

## ● 实验证据:

- $^{161,163,165,167}\text{Lu}$  ( $Z=71$ )
  - $^{163}\text{Lu}$ : Ødegård et al., PRL 86, 5866 (2001)
  - $^{163}\text{Lu}$ : Jensen et al., PRL 89, 142503 (2002)
  - $^{165}\text{Lu}$ : Schönwaßer et al., PLB 552, 9 (2003)
  - $^{167}\text{Lu}$ : Amro et al., PLB 553, 197 (2003)
  - $^{161}\text{Lu}$ : Bringel et al., EPJA 24, 167 (2005)
  - $^{167}\text{Ta}$ : Hartley et al., PRC 80, 041304(R) (2009)
- $^{135}\text{Pr}$  ( $Z=59$ )
  - $^{135}\text{Pr}$ : Matta et al., PRL 114, 082501 (2015)
- $^{105}\text{Pd}$  ( $N=59$ )
  - $^{105}\text{Pd}$ : Timar et al., PRL 122, 062501, (2019)
- $^{187,183}\text{Au}$  ( $Z=79$ )
  - $^{187}\text{Au}$ : Sensharma et al., PRL 124, 052501 (2020)
  - $^{183}\text{Au}$ : Nandi et al., PRL 125, 132501 (2020))
- $^{127,131}\text{Xe}$  ( $Z=54$ )
  - $^{127}\text{Xe}$ : Chakraborty et al., PLB 811, 135854 (2020)
  - $^{131}\text{Xe}$ : Chakraborty et al., PRC 107, 064318 (2023)
- $^{133}\text{Ba}$  ( $Z=56$ )
  - $^{133}\text{Ba}$ : Devi et al., PLB 823, 136756 (2021)



## 问题:

$N=59$ 同中子素中是否还存在其它摇摆运动核?

- 形变参数和价核子组态决定着摇摆运动是否存在以及存在的类型。

# 粒子转子模型

- **粒子转子模型**: 转动的原子核描述为一个集体运动的转子耦合价核子 (1个、2个……)

- **PRM 哈密顿量:**

- **集体部分:**

$$\hat{H}_{\text{PRM}} = \hat{H}_{\text{coll}} + \hat{H}_{\text{intr}}$$

$$\hat{H}_{\text{coll}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{R}_i^2}{2\mathcal{J}_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{(\hat{I}_i - \hat{j}_i)^2}{2\mathcal{J}_i}$$

- **粒子部分:**

$$\hat{H}_{\text{intr}} = \sum_i \sum_{\nu} \epsilon_{i,\nu} a_{i,\nu}^{\dagger} a_{i,\nu}$$

$$h_{\text{sp}} = \pm \frac{1}{2} C \left\{ \cos \gamma (\hat{j}_3^2 - \frac{j(j+1)}{3}) + \frac{\sin \gamma}{2\sqrt{3}} (\hat{j}_+^2 + \hat{j}_-^2) \right\} \quad (\beta, \gamma) \text{ by CDFT}$$

- **电磁跃迁:**

$$B(\sigma\lambda, I \rightarrow I') = \sum_{\mu M'} |\langle I' M' | \mathcal{M}_{\lambda\mu}^{\sigma} | I M \rangle|^2$$

- **E2 算符:**

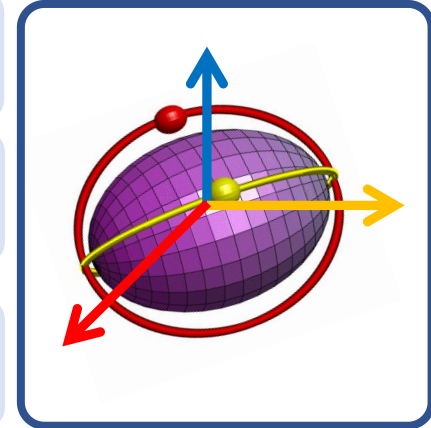
$$\mathcal{M}(E2, \mu) = \sqrt{5/16\pi} \hat{Q}_{2\mu}$$

- **M1算符:**

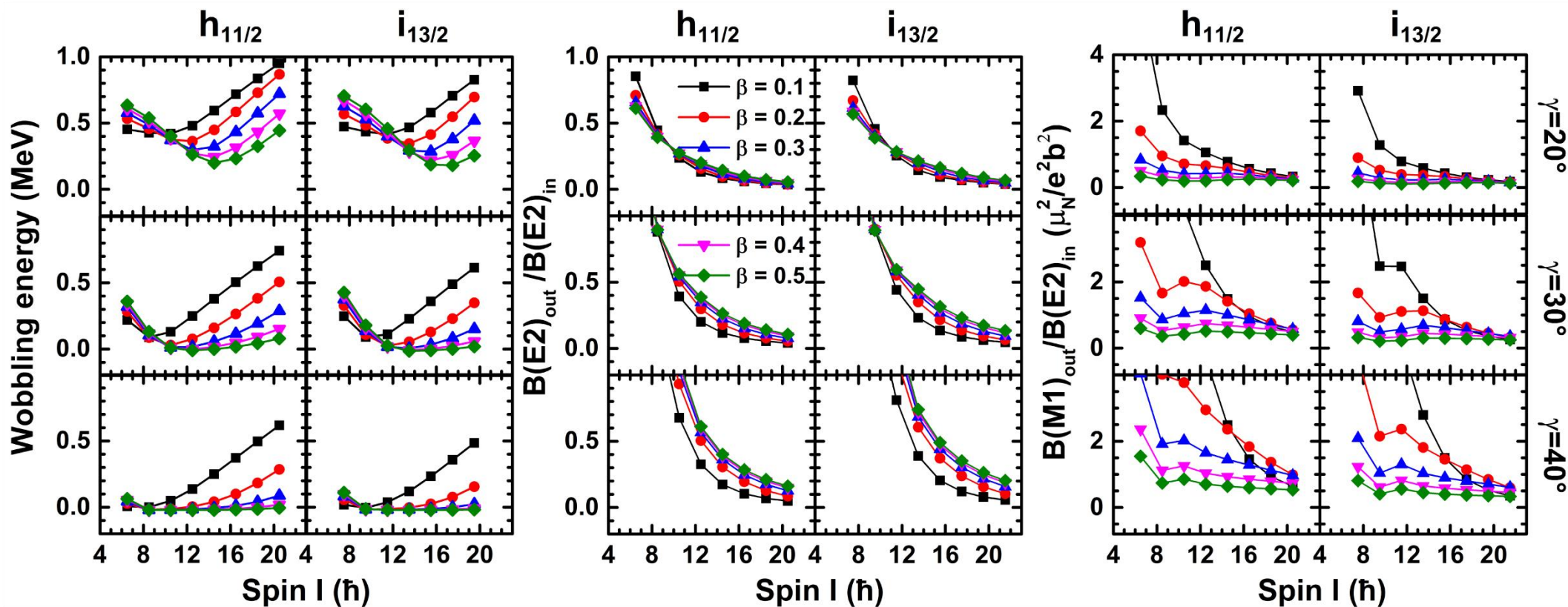
$$\mathcal{M}(M1, \mu) = \frac{3}{4\pi} \frac{e\hbar}{2Mc} [(g_p - g_R) \hat{j}_{p\mu} + (g_n - g_R) \hat{j}_{n\mu}]$$

- **角动量:**

$$R_k = \sqrt{\langle \hat{R}_k^2 \rangle}, \quad J_{pk} = \sqrt{\langle \hat{j}_{pk}^2 \rangle}, \quad J_{nk} = \sqrt{\langle \hat{j}_{nk}^2 \rangle}$$

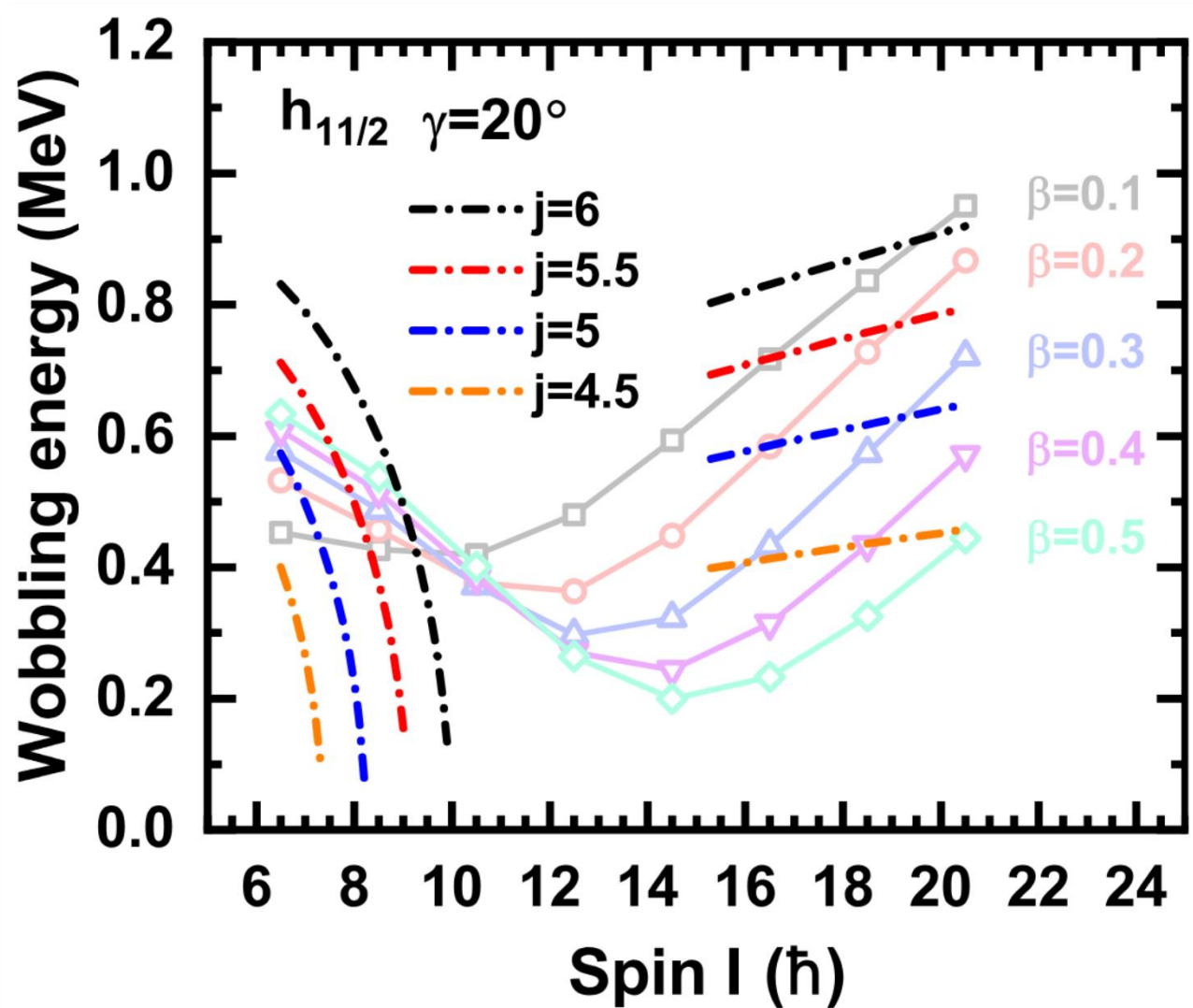


## ■ 摇摆能量、电磁跃迁几率



- 不同形变参数下，摇摆能量的初始值不同。
- $B(E2)_{out}/B(E2)_{in}$  在不同形变下变化相似。
- $B(M1)_{out}/B(E2)_{in}$  在不同形变下变化差异性很大。

## Harmonic Frozen Alignment (HFA): *Fraundorf & Dönau, PRC 89, 014322 (2014)*



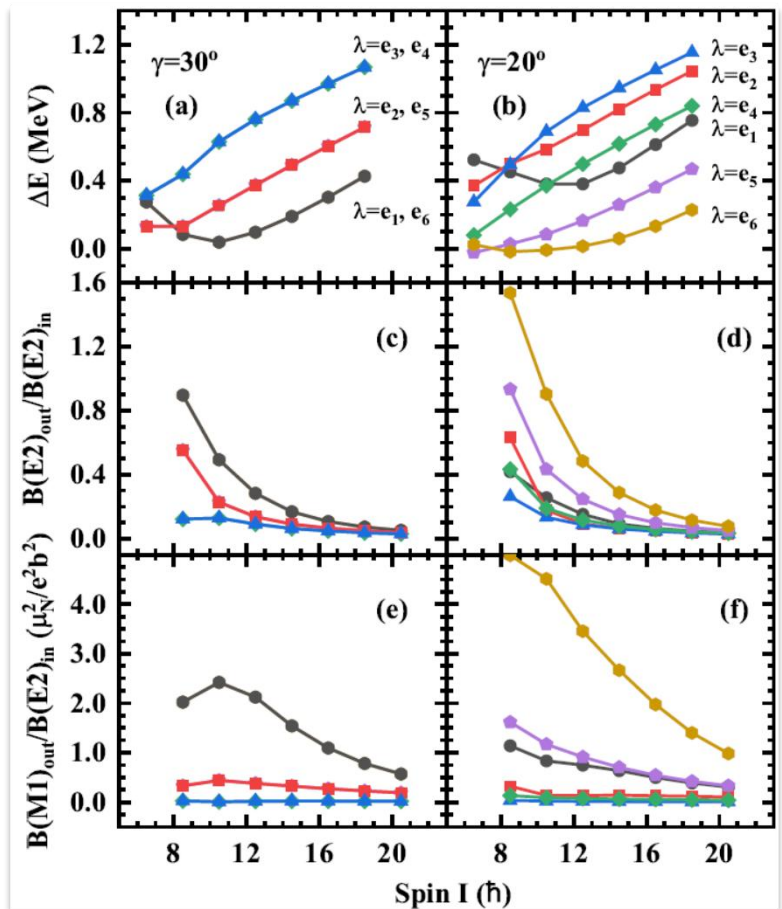
### 摇摆频率:

$$\hbar\omega = \frac{j}{J_3} \left[ \left( 1 + \frac{J}{j} \left( \frac{J_3}{J_1} - 1 \right) \right) \left( 1 + \frac{J}{j} \left( \frac{J_3}{J_2} - 1 \right) \right) \right]^{1/2}$$

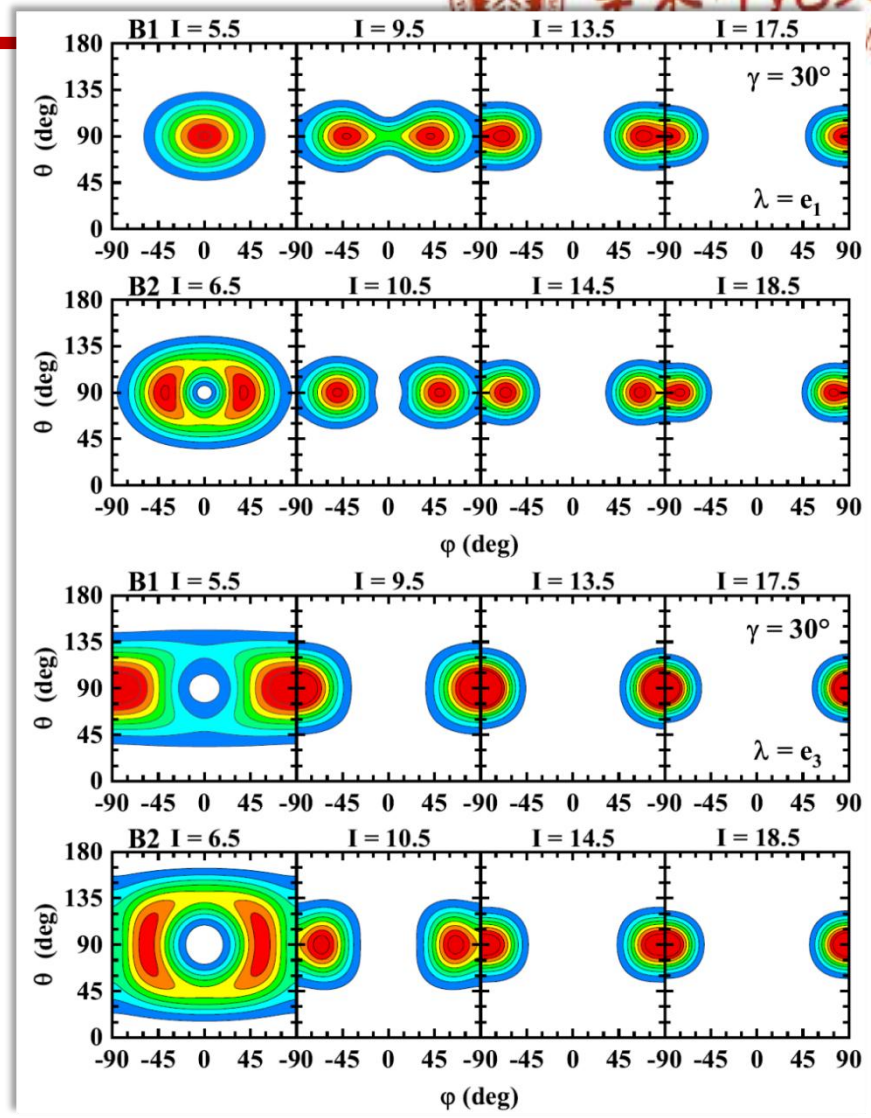
- 横向摇摆 in 四极形变大的原子核可以维持更大自旋范围。
  - 相同自旋范围内摇摆能量的初始值与最终值大小不同。
- 运用HFA很好的解释了在γ相同的情况下，低自旋和高自旋摇摆能量在不同β处能量大小的差异性。



## ■ 探究价核子处于不同费米面上对摇摆运动的影响



S. H. Li, HMD, Q. B. Chen, CPC, 48 (2024)



● 形变参数和价核子组态的获取很重要，我们采用微观自洽的协变密度泛函理论来获取这些信息。

# 协变密度泛函理论

- 能量密度函数(*point-coupling*):

$$\begin{aligned}
 E_{\text{DF}} &= \int d^3r \mathcal{E}(\mathbf{r}) \\
 &= \int d^3r \sum_k v_k^2 \psi_k^\dagger(\mathbf{r}) (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m) \psi_k(\mathbf{r}) + \int d^3r \left( \frac{\alpha_S}{2} \rho_S^2 + \frac{\beta_S}{3} \rho_S^3 + \frac{\gamma_S}{4} \rho_S^4 + \frac{\delta_S}{2} \rho_S \Delta \rho_S + \frac{\alpha_V}{2} j_\mu j^\mu \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\gamma_V}{4} (j_\mu j^\mu)^2 + \frac{\delta_V}{2} j_\mu \Delta j^\mu + \frac{\alpha_{TV}}{2} \vec{j}_{TV}^\mu (\vec{j}_{TV})_\mu + \frac{\delta_{TV}}{2} \vec{j}_{TV}^\mu \Delta (\vec{j}_{TV})_\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F^{0\mu} \partial_0 A_\mu + e A_\mu j_p^\mu \right)
 \end{aligned}$$

Dirac eq.  $\rightarrow [i\gamma_\mu(i\partial^\mu - V^\mu) - (m + S)]\psi_k = 0$

- 局域密度( $\rho$ ) & 流 ( $j$ );  $S$ : 标量势;  $V$ : 矢量势;  $T$ : 同位旋矢量
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  表示 ~11 参数, 比如: PC-F1, DD-PC1, PC-PK1, .....

*Burvenich2002PRC, Niksic2008PRC, Zhao2010PRC*

- 形变约束计算:

- ( $\beta, \gamma$ ) 约束:

$$\delta \left[ \langle \hat{H} \rangle + \sum_{\mu=0,2} C_{2\mu} (\langle \hat{Q}_{2\mu} \rangle - q_{2\mu})^2 \right] = 0$$

$$q_{20} = \sqrt{5/16\pi} \langle \hat{Q}_{20} \rangle$$

$$q_{22} = \sqrt{15/32\pi} \langle \hat{Q}_{22} \rangle$$

$$\hat{Q}_{20} = 2z^2 - x^2 - y^2$$

$$\hat{Q}_{22} = x^2 - y^2$$

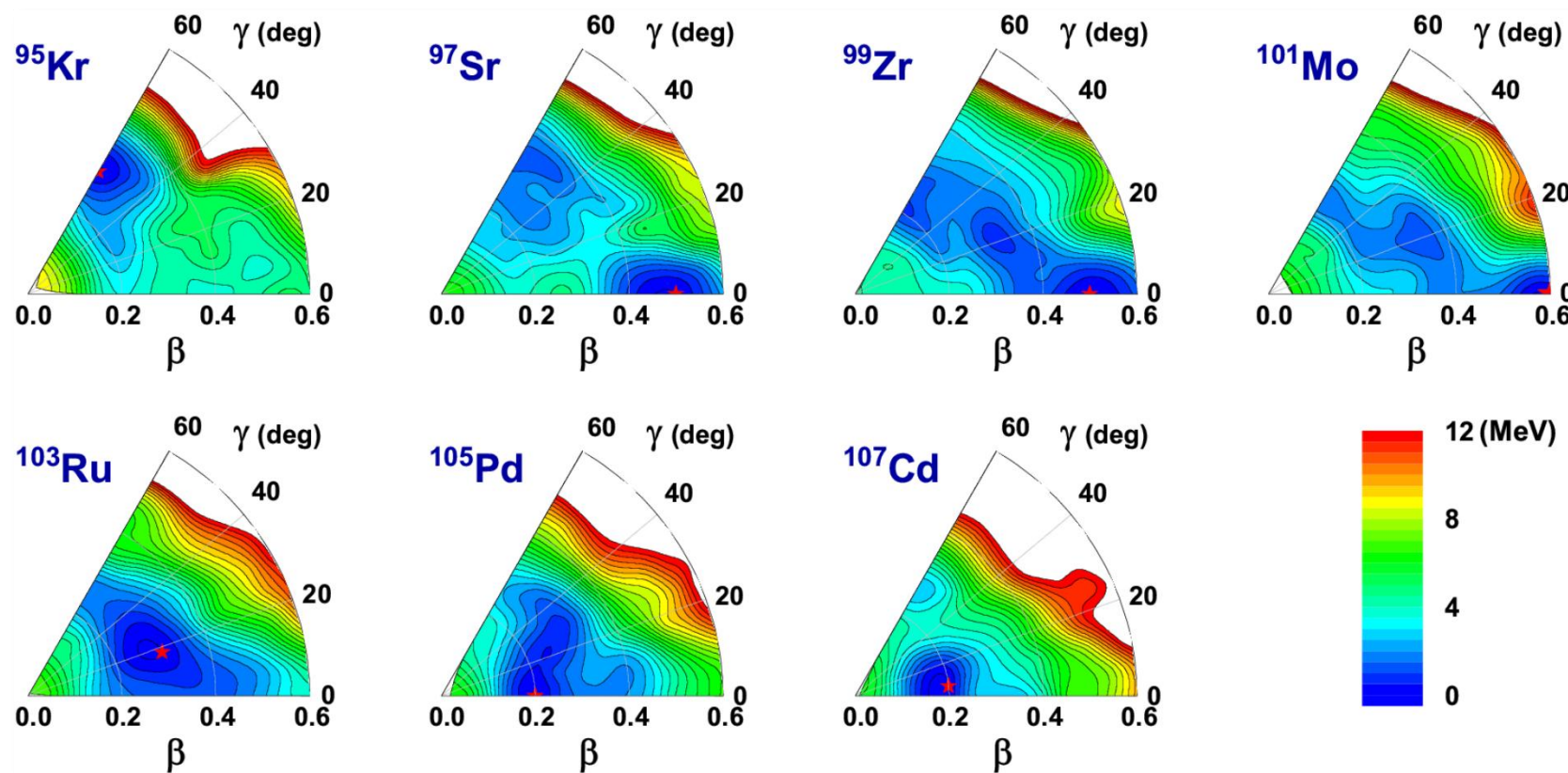
- $\beta^2$  约束:

$$\delta \left[ \langle \hat{H} \rangle + C (\langle \hat{Q}_{20} \rangle^2 + 2 \langle \hat{Q}_{22} \rangle^2 - \mu)^2 \right] = 0$$



$$\beta = \frac{4\pi}{3AR_0^2} \sqrt{q_{20}^2 + 2q_{22}^2}, \quad \gamma = \arctan \left( \frac{\sqrt{2}q_{22}}{q_{20}} \right)$$

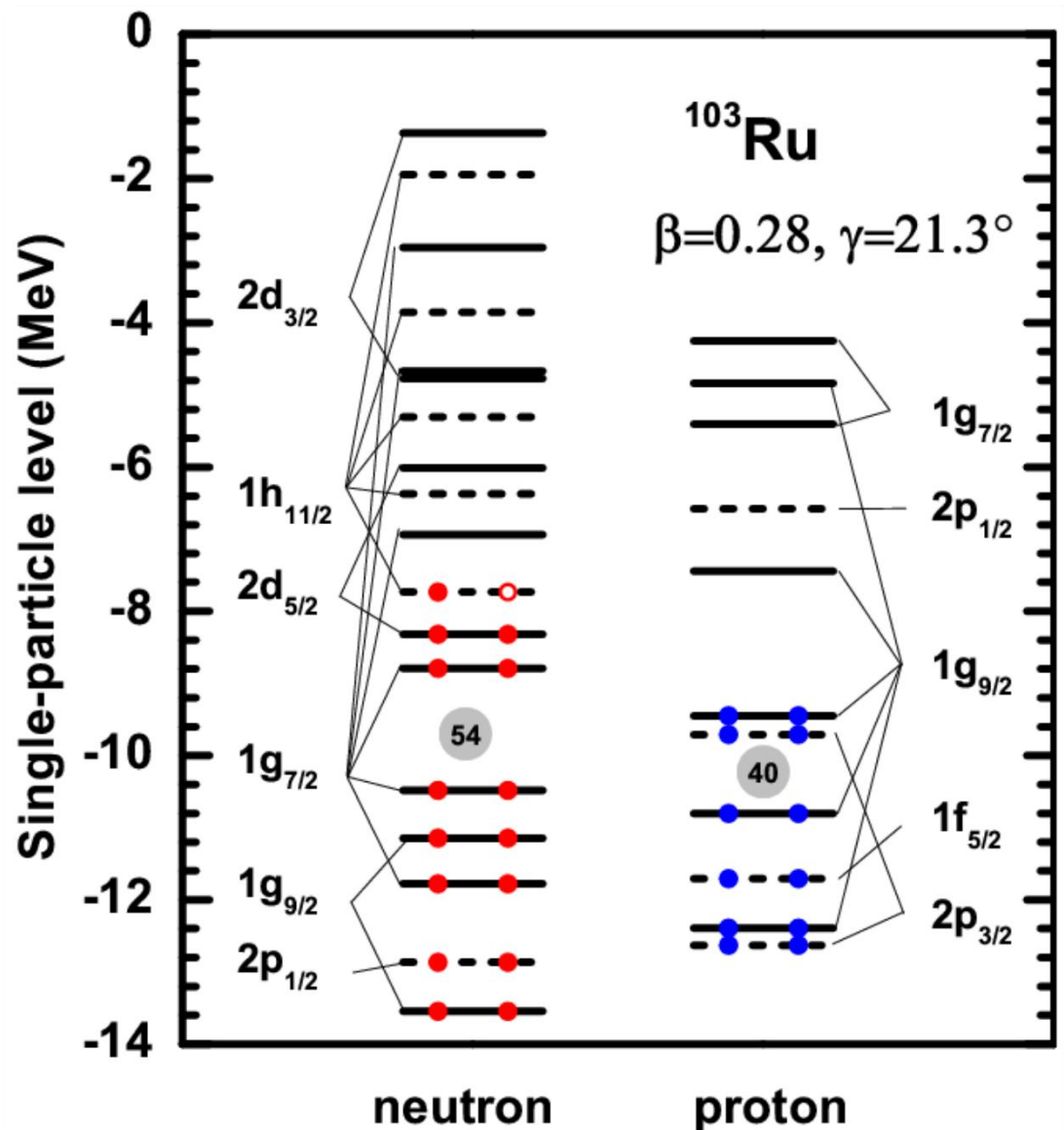
## ■ 同中子链<sup>95</sup>Kr、<sup>97</sup>Sr、<sup>99</sup>Zr、<sup>101</sup>Mo、<sup>103</sup>Ru、<sup>105</sup>Pd 和<sup>107</sup>Cd的位能曲面



奇A核摇摆运动原子核条件:

- 稳定的三轴结构
- 高-j价核子或空穴

➤ 位能曲面可以直观展示原子核基态位置。原子核<sup>103</sup>Ru基态具有稳定的三轴结构。



■  $^{103}\text{Ru}$ 单粒子能级（中子、质子）

- $^{103}\text{Ru}$ 的最后一个中子占据在 $1h_{11/2}$ 能级，符合价核子占据高-j轨道。根据摇摆运动条件原子核 $^{103}\text{Ru}$ 是摇摆运动的候选核。

问题：  
激发态的原子核是否可以形成摇摆运动？

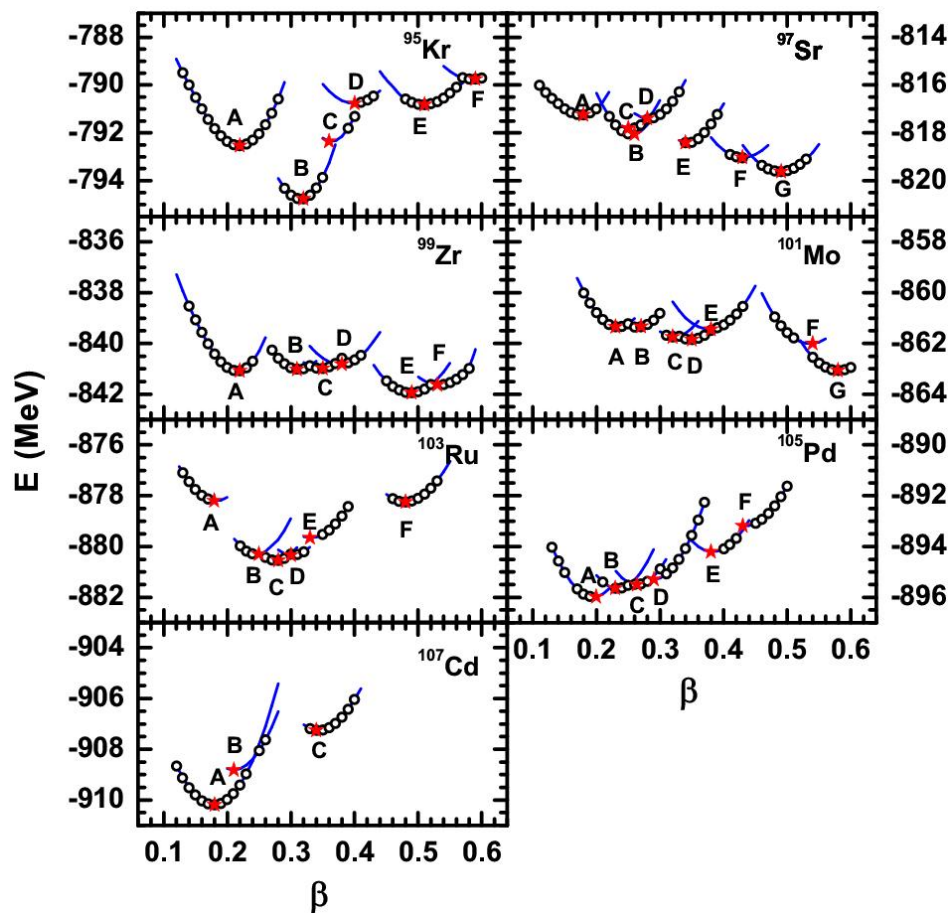


FIG:  $^{95}\text{Kr}$ 、 $^{97}\text{Sr}$ 、 $^{99}\text{Zr}$ 、 $^{101}\text{Mo}$ 、 $^{103}\text{Ru}$ 、 $^{105}\text{Pd}$  和  $^{107}\text{Cd}$  在绝热（空心圆圈）和形状固定（实线）约束三轴 CDFT 计算中的势能曲线与形变  $\beta$  的函数关系。

Nucleus	State	Valence	Unpaired	Energy	$\beta$	$\gamma$
$^{95}\text{Kr}$	A	$\pi(2p_{3/2})^2 \otimes \nu[(1g_{7/2})^4(2d_{3/2})^1]$	$\nu(2d_{3/2})^1$	-792.53	0.22	35.9°
$^{97}\text{Sr}$	C	$\pi[(1g_{9/2})^2(2p_{3/2})^2] \otimes \nu[(2d_{3/2})^{-1}(1g_{7/2})^{-2}]$	$\nu(2d_{3/2})^1$	-817.80	0.25	37.9°
	D	$\pi[(2p_{3/2})^2(1g_{9/2})^2] \otimes \nu[(1h_{11/2})^1(1g_{7/2})^{-2}(2d_{5/2})^2]$	$\nu(1h_{11/2})^1$	-817.40	0.28	30.4°
$^{99}\text{Zr}$	B	$\pi(1g_{9/2})^4 \otimes \nu(1h_{11/2})^1$	$\nu(1h_{11/2})^1$	-841.02	0.31	23.3°
$^{101}\text{Mo}$	A	$\pi(1g_{9/2})^4 \otimes \nu[(1g_{7/2})^{-3}(2d_{5/2})^{-2}]$	$\nu(1g_{7/2})^1$	-861.34	0.23	25.9°
	B	$\pi[(2p_{3/2})(1g_{9/2})^4] \otimes \nu[(1h_{11/2})^1(1g_{7/2})^6]$	$\nu(1h_{11/2})^1$	-861.34	0.27	22.9°
	C	$\pi(1g_{9/2})^6 \otimes \nu[(1h_{11/2})^1(1g_{7/2})^6]$	$\nu(1h_{11/2})^1$	-861.74	0.32	21.6°
$^{103}\text{Ru}$	B	$\pi(1g_{9/2})^6 \otimes \nu[(1g_{7/2})^{-3}(2d_{5/2})^2]$	$\nu(1g_{7/2})^1$	-880.30	0.25	20.4°
$^{105}\text{Pd}$	B	$\pi(1g_{9/2})^{-2} \otimes \nu[(1g_{7/2})^5(2d_{5/2})^4]$	$\nu(1g_{7/2})^1$	-895.65	0.23	22.2°
	C	$\pi(1g_{9/2})^{-2} \otimes \nu[(1h_{11/2})^1(1g_{7/2})^6(2d_{3/2})^2]$	$\nu(1h_{11/2})^1$	-895.49	0.27	24.9°
	D	$\pi(1g_{9/2})^{-2} \otimes \nu[(1g_{7/2})^5(2d_{3/2})^2(1h_{11/2})^2]$	$\nu(1g_{7/2})^1$	-895.29	0.29	30.7°

➤ 原子核 $^{97}\text{Sr}$ 、 $^{99}\text{Zr}$ 、 $^{101}\text{Mo}$ 、 $^{103}\text{Ru}$ 、 $^{105}\text{Pd}$  均是摇摆运动候选核。

● 为了检验它们是否具有摇摆带，进一步采用完全量子化的粒子转子模型研究它们的谱学性质。

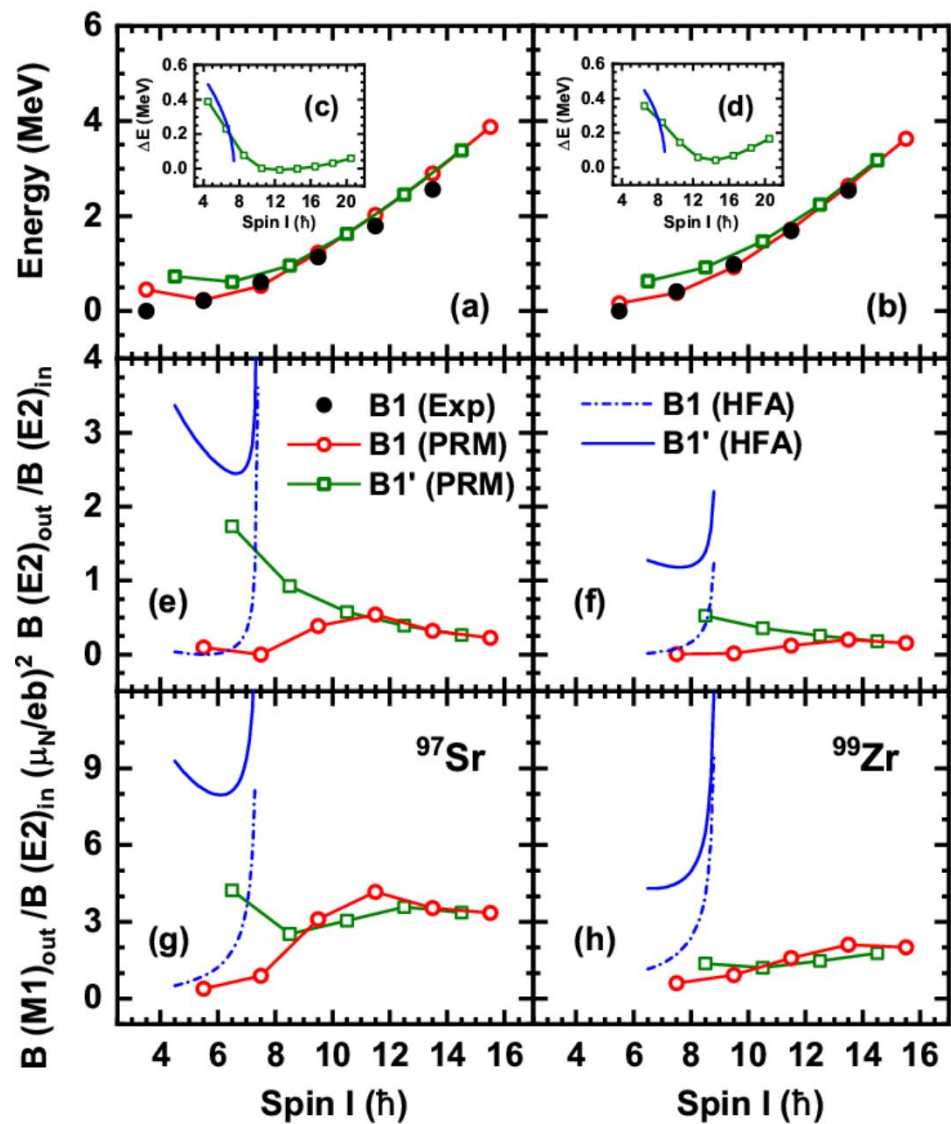


FIG: 基于  $^{97}\text{Sr}$  和  $^{99}\text{Zr}$  中构型  $vh_{11/2}$  的最低带 B1 和 B1' [Urban. et al., *NPA* 689, 605 (2001).]. (a)-(b) PRM 计算的能谱。(c)-(d) 摇摆能量。(e)-(h)电磁跃迁几率。

- 在整个自旋范围内，能量差先下降后缓慢上升。表示原子核先是横向摇摆后变为纵向摇摆。
- 电磁跃迁几率  $B(E2)_{\text{out}}/B(E2)_{\text{in}}$  比率很大，预示着横向摇摆。

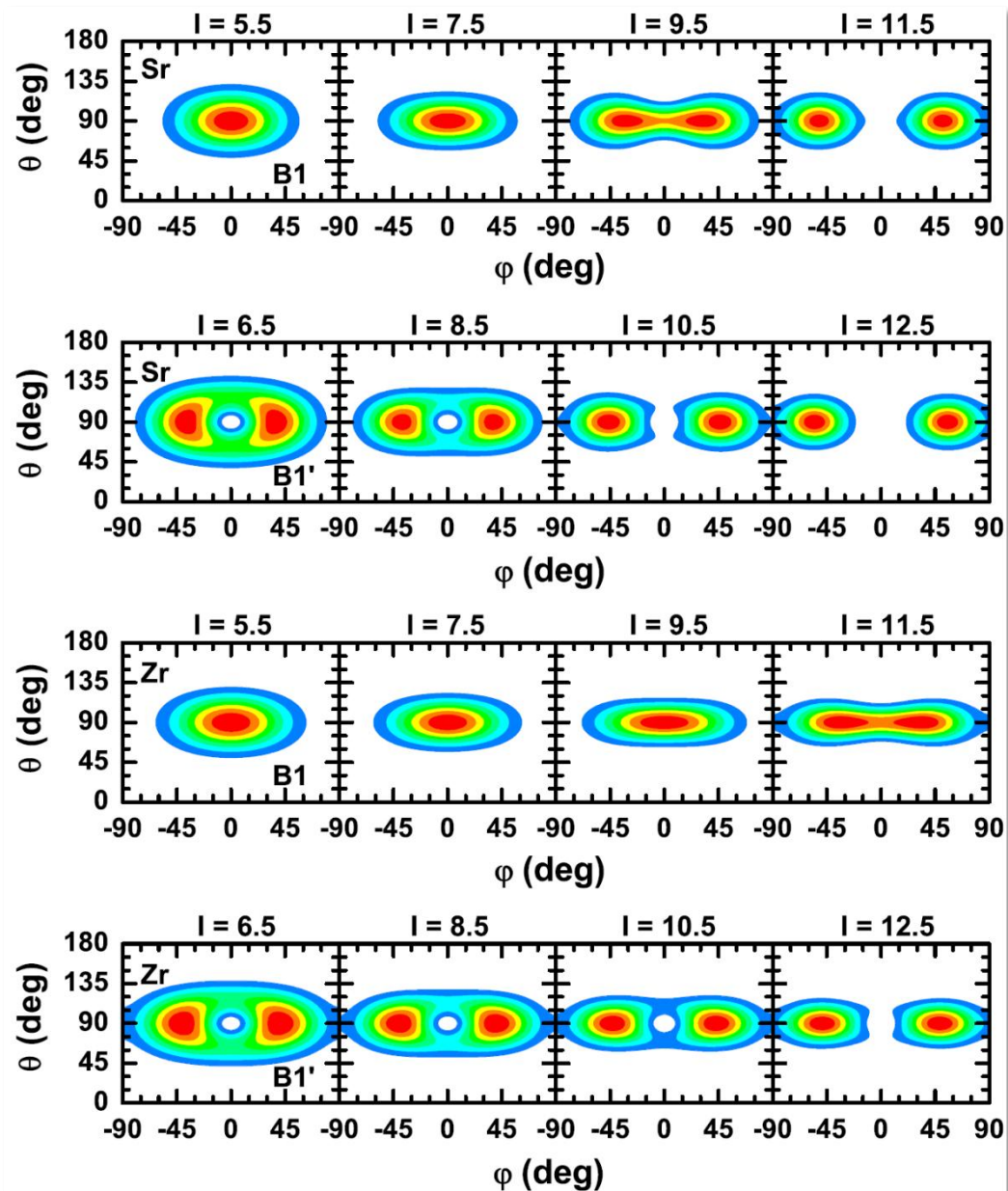
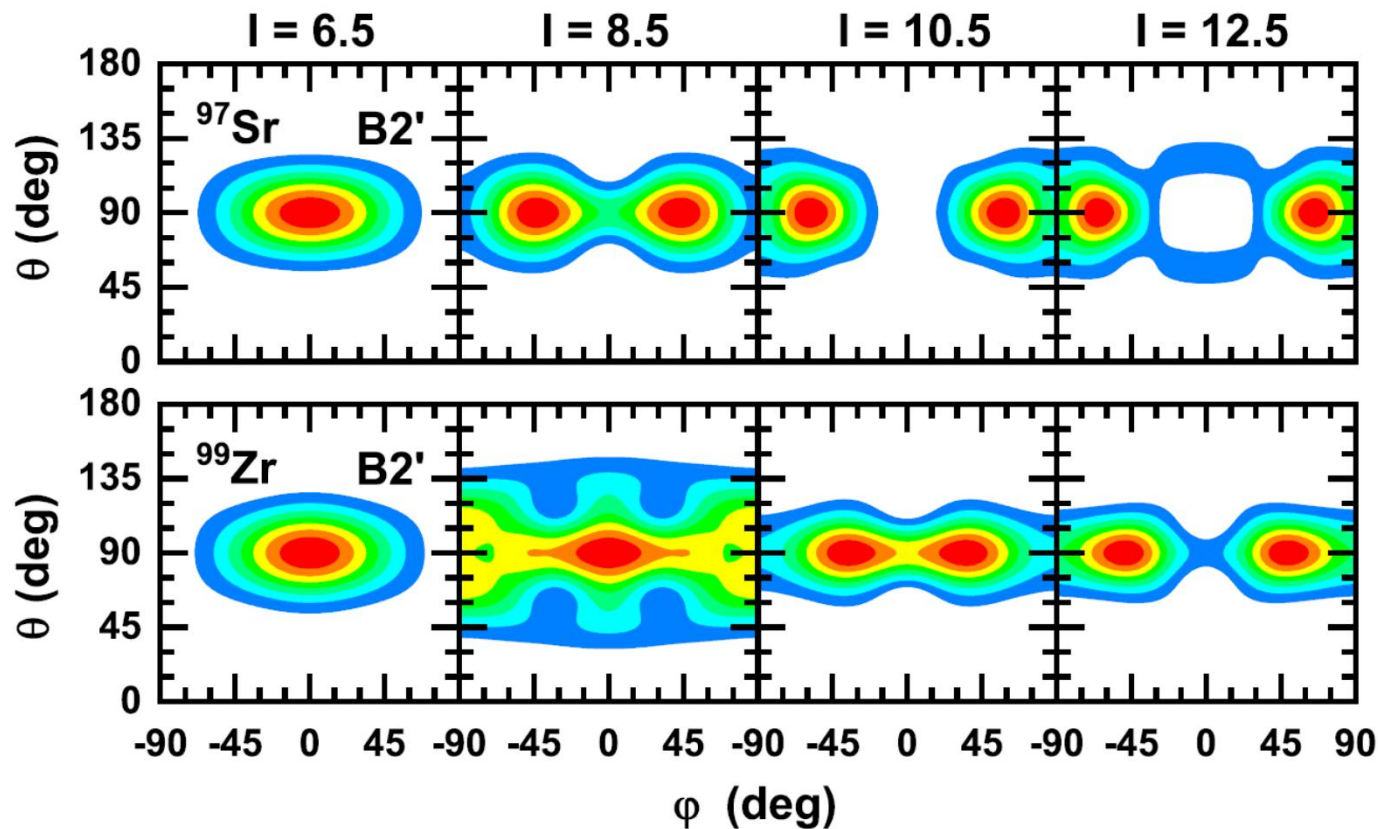
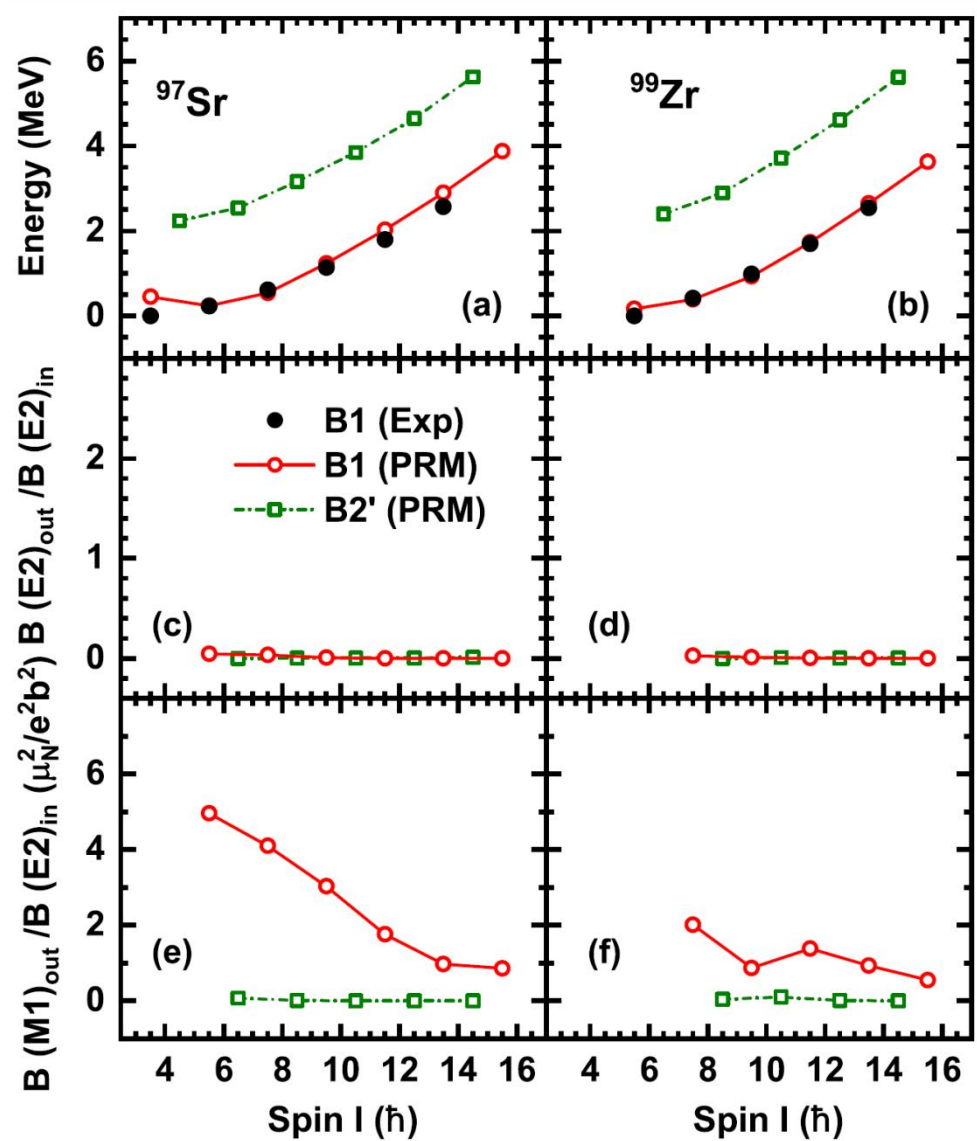


FIG: PRM 计算的  $^{97}\text{Sr}$  和  $^{99}\text{Zr}$  双带 B1 和 B1' 的 SCS 图, 即角动量  $I$  在  $(\theta, \varphi)$  平面上的方向概率密度剖面图。

- 验证结论,  $^{97}\text{Sr}$  在  $I < 10.5\hbar$  表现为横向摇摆,  $^{99}\text{Zr}$  在  $I < 12.5\hbar$  表现为横向摇摆

### 小结:

- 结合实验信息, 运用粒子转子模型, 判断  $^{97}\text{Sr}$ ,  $^{99}\text{Zr}$  为横向摇摆候选核。



➤ 对高能量的B2'带进行了学习，判断其为B1带的签名伙伴带。



- 运用粒子转子模型 (PRM)，探究形状因素和价核子对摇摆运动的影响。
- 运用协变密度泛函理论 (CDFT) 得到原子核组态信息和相应形变信息。预言 $^{97}\text{Sr}$ ， $^{99}\text{Zr}$ ， $^{101}\text{Mo}$ ， $^{103}\text{Ru}$ ， $^{105}\text{Pd}$ 为摇摆运动候选核。
- 运用粒子转子模型 (PRM)， $^{97}\text{Sr}$ ， $^{99}\text{Zr}$ 存在横向摇摆。

# Thank you !



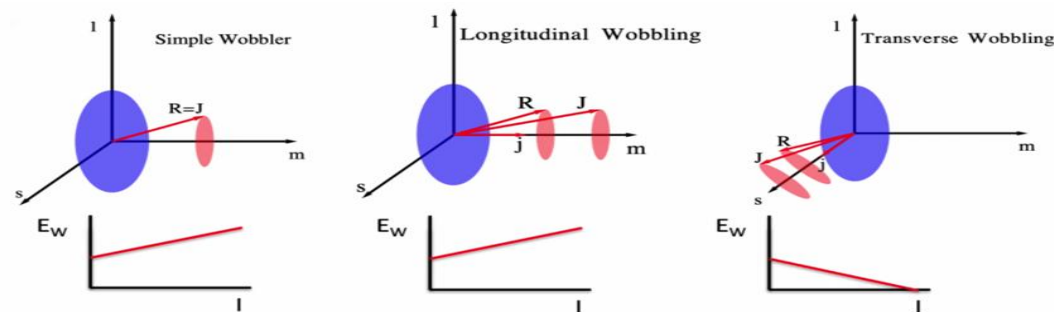
## 摇摆能量：

对于声子数 $n$ 为偶数：

$$E_{\text{wob}} = E(n, l) - E(0, l)$$

对于声子数 $n$ 为奇数：

$$E_{\text{wob}} = E(n, l) - \frac{1}{2} [E(0, l - 1) + E(0, l + 1)]$$



## • 区分摇摆运动类型

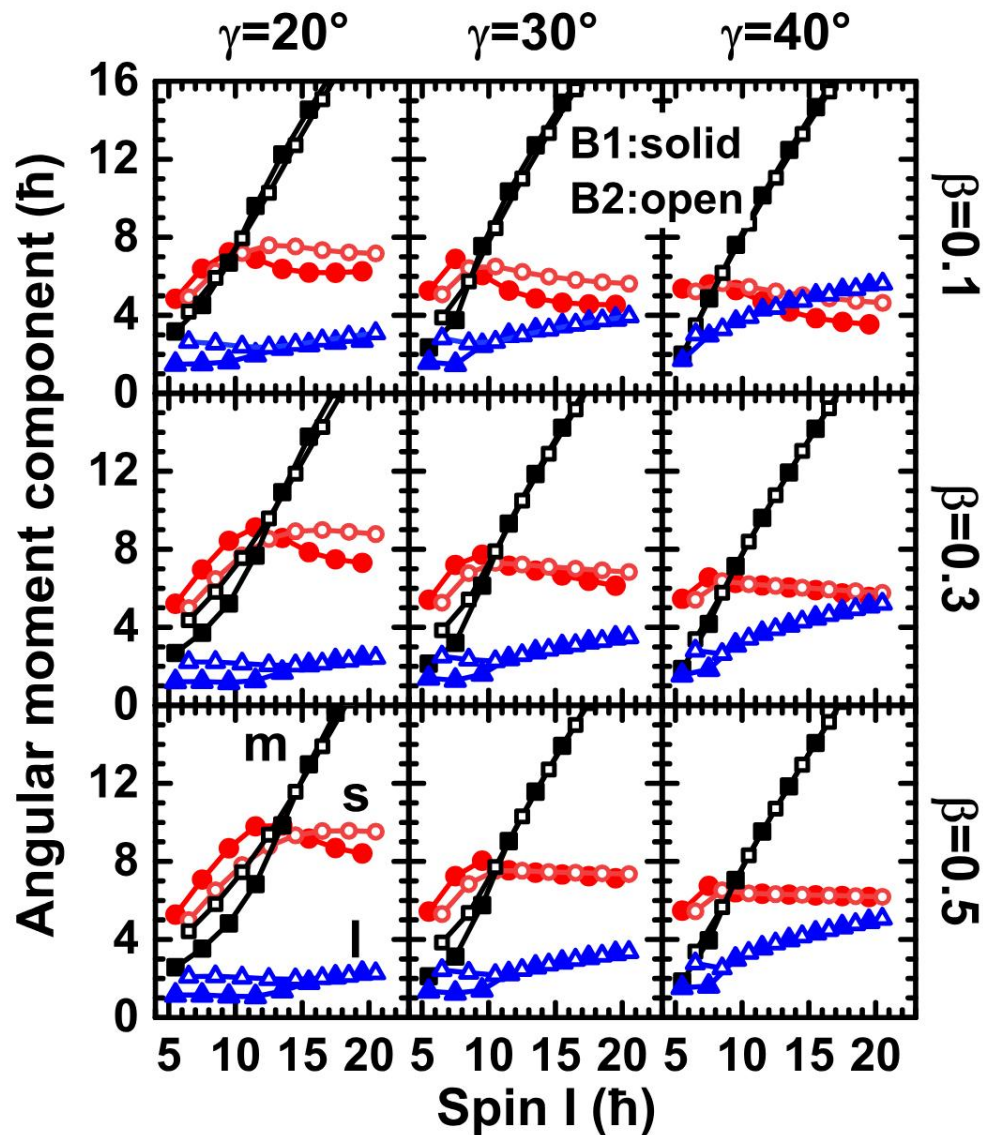


FIG: 在 $h_{11/2}$ 组态下, 用不同形变参数 $\beta$ 和 $\gamma$ 的PRM计算了B1和B2带沿中轴、短轴和长轴的总角动量分量。

- 角动量初始值s轴最大, m轴次之, l轴最小
- 验证了 $\gamma$ 小 $\beta$ 大更容易形成横向摇摆

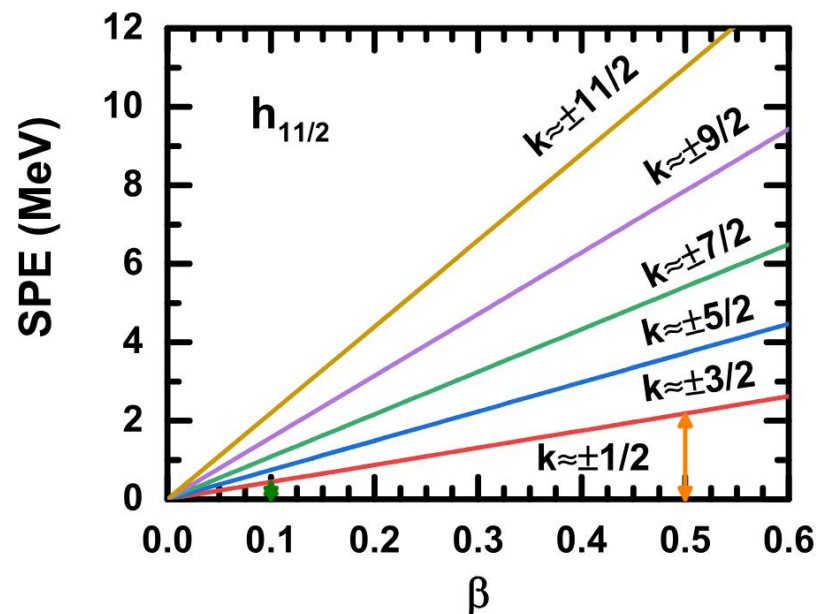


FIG. 7: 单粒子 $h_{11/2}$ 能量 $\varepsilon$ 相对于最低能级随四极形变参数变化情况。

- $\gamma = 20^\circ$ 时单粒子 $h_{11/2}$ 角动量第三分量随 $\beta$ 的变化情况。 $k = \pm 1/2$ 和 $\pm 3/2$ 水平之间的箭头表示小变形 $\beta = 0.1$ 和大变形 $\beta = 0.5$ 时两个水平的能量间隔。

- $\gamma$  相同情况下，四极形变大处能量差大。

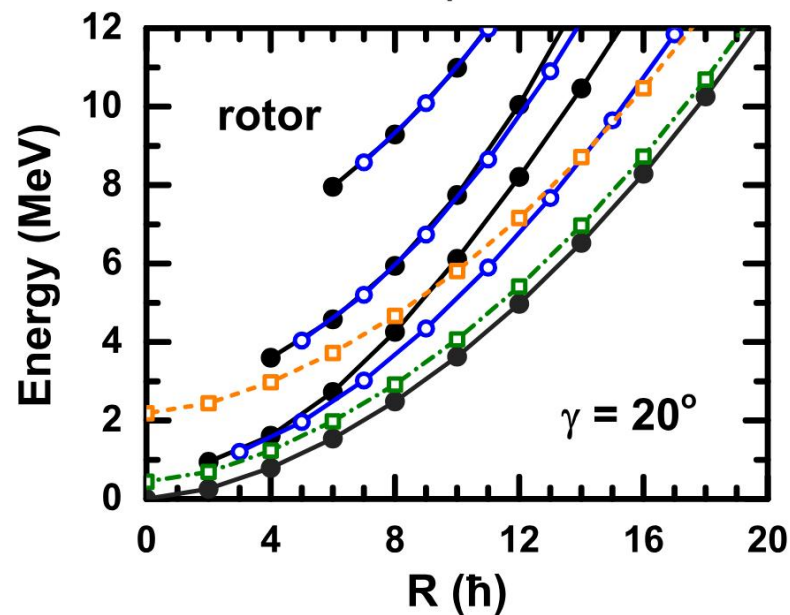
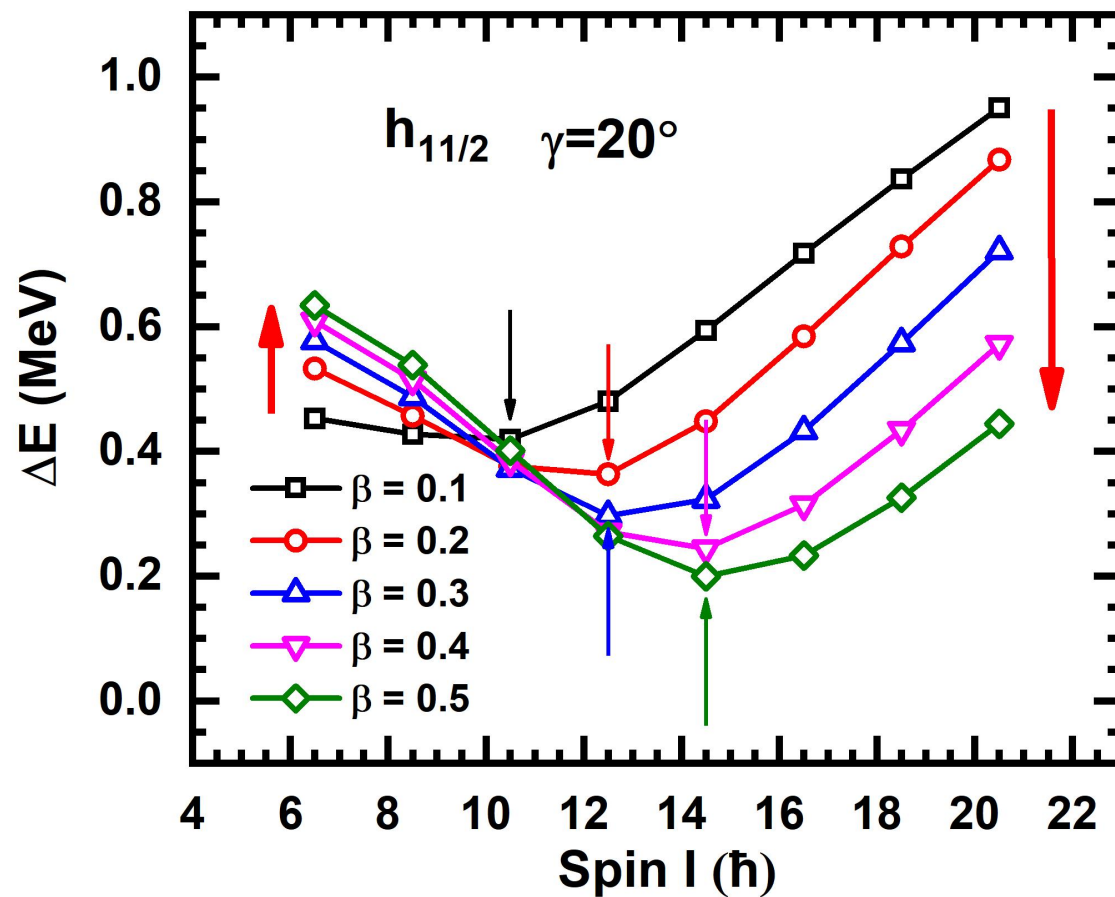


FIG. 8: 三轴转子( $\gamma = 20^\circ$ )角动量 $R$ 的能量。

- 实线的实点属于特征为 $\alpha = 0$ 的能量，空点为特征为 $\alpha = 1$ 的能量。虚线的空点是通过增加 $\beta = 0.1$ (绿线)和 $\beta = 0.5$ (黄线)时 $k = \pm 1/2$ 和 $\pm 3/2$ 能级之间的能量差在核心最低能量上得到的。

- 大 $\beta$ 原子核能量更大，价核子转移到中间轴所需能量更大。解释了四极形变大原子核横向摇摆可以维持更大自旋范围。



问题:

- 四极形变大的原子核横向摇摆可以维持更大自旋范围。
- 相同自旋范围内摇摆能量的初始值与最终值大小不同。

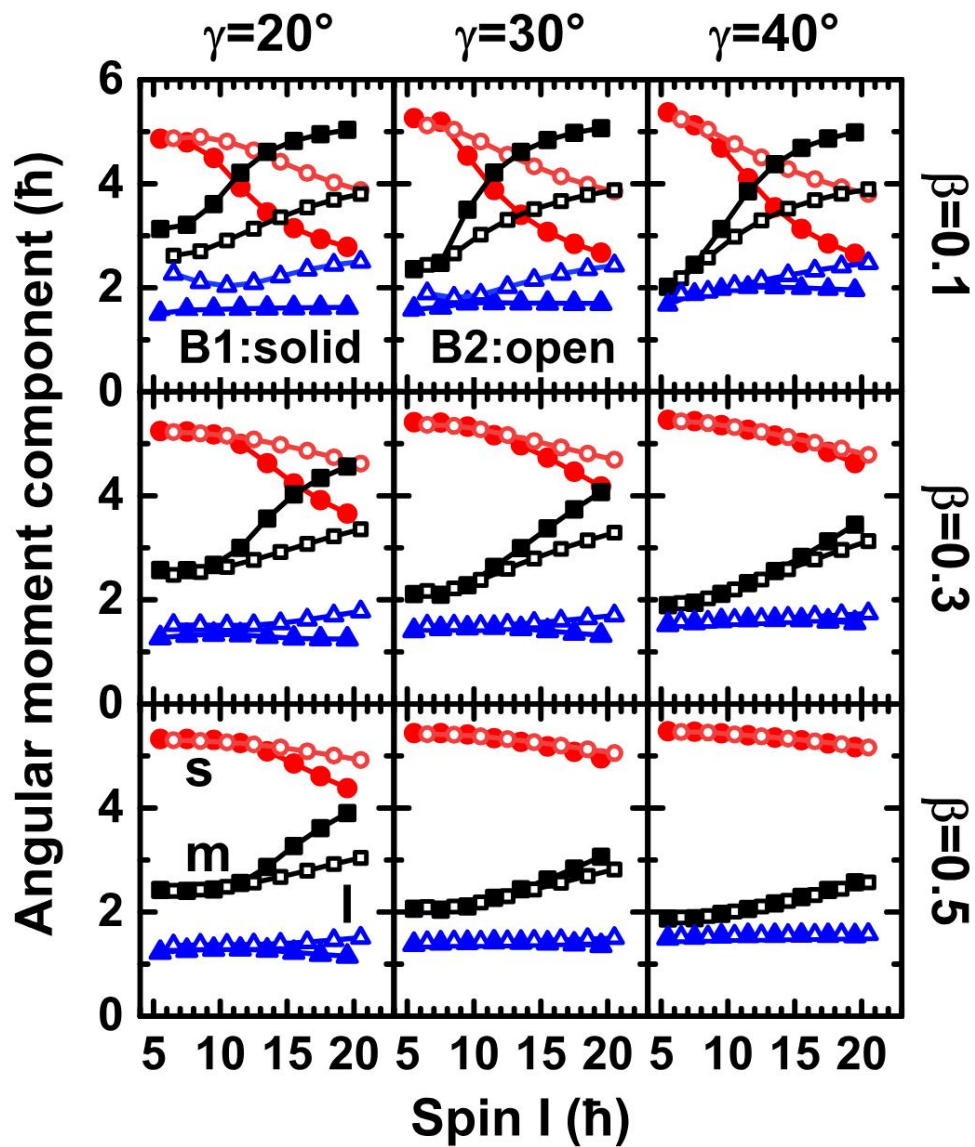


FIG. 10 : 在不同形变参数 $\beta$ 和 $\gamma$ 下B1和B2带沿中轴、短轴和长轴的单粒子 $h_{11/2}$ 角动量分量。

- 在不同形变参数下，在自旋初始值时， $\beta$ 值越大，s轴角动量分量越大。
- 在自旋末端时， $\beta$ 值越小，m轴角动量分量越大。

*HMD and Q. B. Chen, in preparation*