



安徽理工大学

ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

# 第一届安徽省核物理研讨会

安徽·合肥 1.22



## 改进的Gross理论及其对原子核 $\beta$ 衰变半衰期的研究

方基宇

安徽理工大学 力学与光电物理学院

2024年01月22日





# 目 录



- 研究背景
- 原子核 $\beta$ 衰变的Gross理论
- 对Gross理论的改进
- 结果与讨论
- 总结与展望



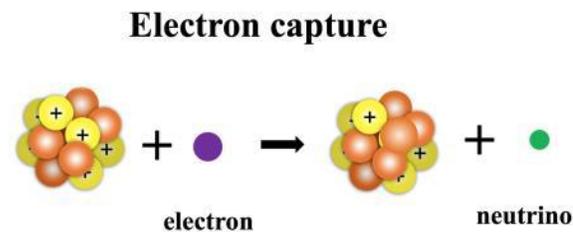
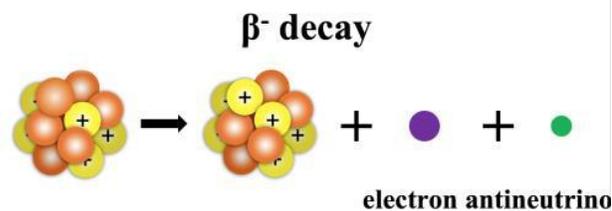
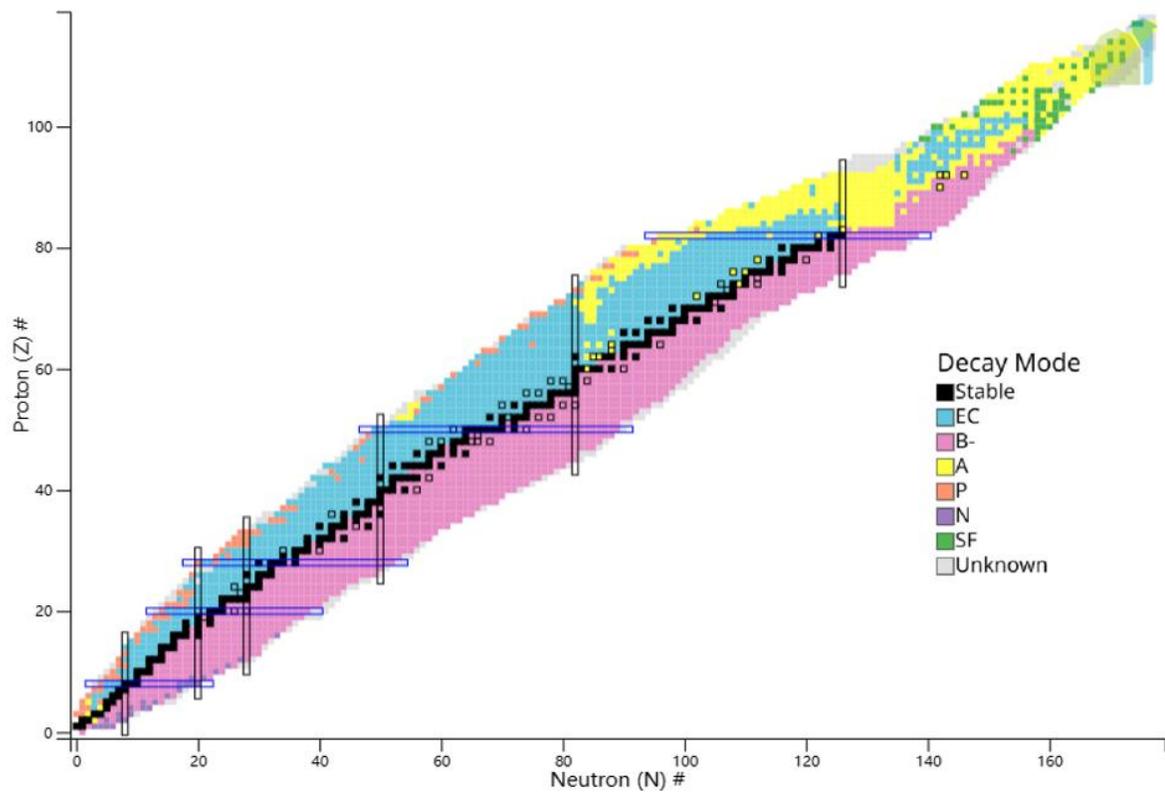
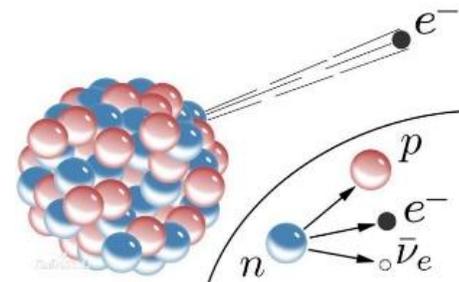
# 目 录



- 研究背景
- 原子核 $\beta$ 衰变的Gross理论
- 对Gross理论的改进
- 结果与讨论
- 总结与展望

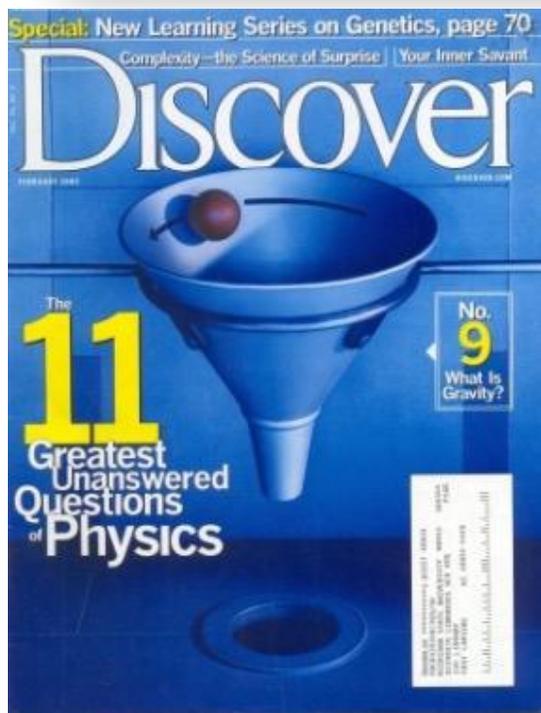
### ● 原子核β衰变

- 原子核自发地放射出β粒子或俘获一个轨道电子而发生的转变。
- β衰变在核物理领域有着重要地位，大部分不稳定核主要发生β衰变。



## ● 原子核 $\beta$ 衰变

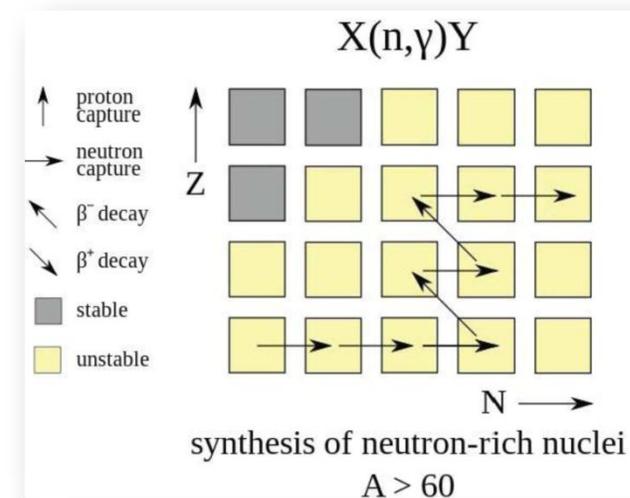
➤ 原子核 $\beta$ 衰变在天体物理领域起着重要的作用。约一半的重元素由快中子俘获过程( $r$ -过程)合成,  $\beta$ 衰变设定了 $r$ -过程的时标, 是研究 $r$ -过程的关键物理量。



比铁重的元素是如何合成的?

《发现》杂志:

“物理学十一大待解之谜”



## ● 目前预言 $\beta$ 衰变半衰期的理论方法

- 唯象公式 Zhang2006PRC, Zhou2017SCPMA, Shi2021CPC, Zhou2022JPG
- 壳模型方法 Pinedo1999PRL, Caurier2002PRC, Langanke2003RMP, Zhi2013PRC
- 准粒子无规相位近似方法 Marketin2016PRC, Niu2013PLB,  
Möller2003PRC, Ney2020PRC, Minato2022PRC
- Gross理论 Takahashi1969PTP, Koura2017PRC, Endo2019PRC, Fang2022PRC

两大  
优势

- ✓ 高精度、低计算成本
- ✓ 基于高精度的质量预言→几乎整个核素图的原子核 $\beta$ 衰变半衰期

- 原子核是一个复杂的量子多体系统，至今还很难用一个理论、模型来描述。
- Gross理论本质上是一个宏观模型，我们需要更多地考虑微观效应。

- ✓ 在Semi-Gross理论中：
- ✓ 是从核质量数据推导出的近似单粒子能量分布。
- ✓ 单粒子强度函数依赖于衰变核子初态的主量子数和自旋宇称。

➤ 协变密度泛函理论是一个成功的微观核模型，也可以称相对论密度泛函理论，被广泛应用于很多核性质的预测。



# 目录



- 研究背景
- 原子核 $\beta$ 衰变的Gross理论
- 对Gross理论的改进
- 结果与讨论
- 总结与展望

● **Gross理论**：基于强度函数的求和规则，以统计方式处理所有的β衰变跃迁

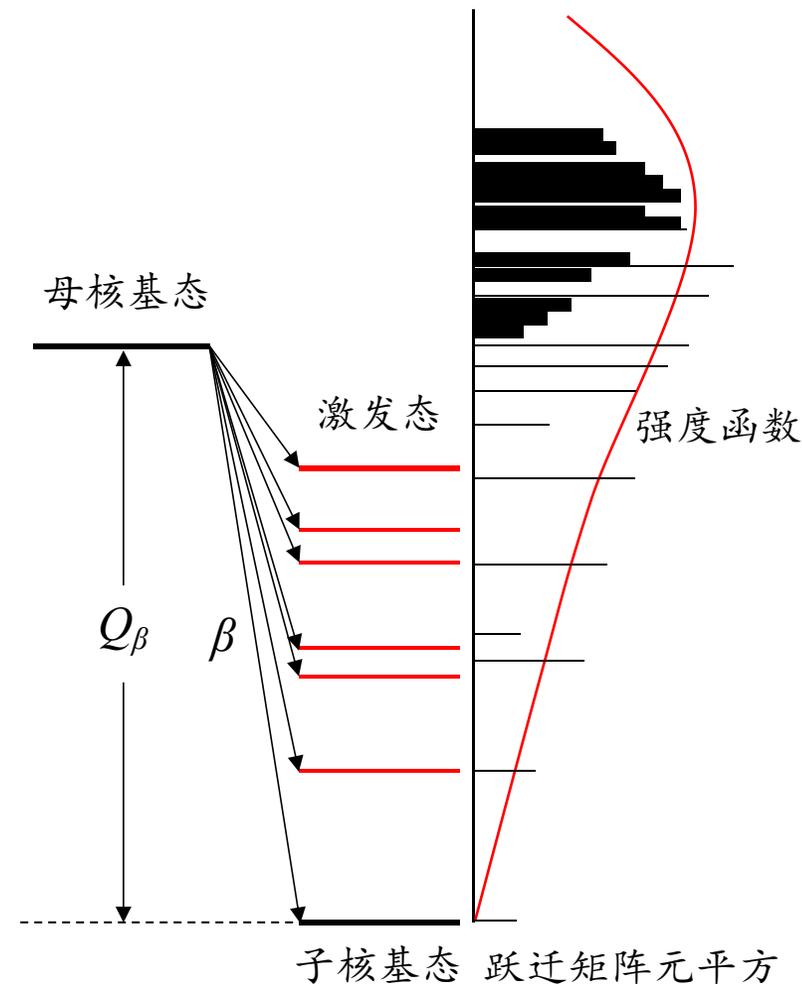
$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \lambda = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \sum_j \left\{ |G_F|^2 \left| \int 1_j \right|^2 + |G_{GT}|^2 \left| \int \sigma_j \right|^2 \right\} f(E_i - E_j)$$

Gross近似

Gross处理

$$\lambda \approx \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_{-Q}^0 \left\{ |G_F|^2 |M_F(E)|^2 + |G_{GT}|^2 |M_{GT}(E)|^2 \right\} f(-E) dE$$

- $G_F$ 、 $G_{GT}$ ：Fermi、Gamow-Teller相互作用耦合常数
- $f(E_i - E_j)$ ：积分Fermi函数
- $|M_\Omega(E)|^2$  ( $\Omega = F, GT$ )：β衰变强度函数



## ● $\beta$ 衰变强度函数

➤ 在Gross理论中将其定义为平均核矩阵元平方乘最终能级密度

$$|M_{\Omega}(E)|^2 = \overline{|\langle \Psi_1 | \Omega | \Psi_j \rangle|^2} \rho(E)$$



$$|M_{\Omega}(E)|^2 = \int D_{\Omega}(E, \varepsilon) \frac{dN_1}{d\varepsilon} W(E, \varepsilon) d\varepsilon, \Omega = F, GT$$

$$\int_{-Q}^{\infty} |M_{\Omega}(E)|^2 dE = \langle \Psi_1 | \Omega^{\dagger} \Omega | \Psi_1 \rangle$$

$$\int_{-Q}^{\infty} E |M_{\Omega}(E)|^2 dE = \langle \Psi_1 | \Omega^{\dagger} [H, \Omega] | \Psi_1 \rangle$$

$$\int_{-Q}^{\infty} E^2 |M_{\Omega}(E)|^2 dE = \langle \Psi_1 | [[\Omega^{\dagger}, H][H, \Omega]] | \Psi_1 \rangle$$

➤  $D_{\Omega}(E, \varepsilon)$ : 单粒子强度函数

➤  $dN_1/d\varepsilon$ : 单粒子能量分布

➤  $W(E, \varepsilon)$ : 考虑泡利不相容原理的权函数

## ● 单粒子强度函数 $D_{\Omega}(E, \varepsilon)$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{F}}(E, \varepsilon) dE = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} E D_{\text{F}}(E, \varepsilon) dE = \Delta_{\text{C}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (E - \Delta_{\text{C}})^2 D_{\text{F}}(E, \varepsilon) dE = \sigma_{\text{C}}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{GT}}(E, \varepsilon) dE = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} E D_{\text{GT}}(E, \varepsilon) dE = \Delta_{\text{GT}} \approx \Delta_{\text{C}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (E - \Delta_{\text{GT}})^2 D_{\text{GT}}(E, \varepsilon) dE = \sigma_{\text{GT}}^2 \approx \sigma_{\text{C}}^2 + \sigma_{\text{N}}^2 \end{cases}$$

➤ 单粒子强度函数采用常用的高斯形式

$$D_{\text{F}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{F}}} \exp\left\{-\frac{(E - \Delta_{\text{F}})^2}{2\sigma_{\text{F}}^2}\right\}$$

$$D_{\text{GT}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{GT}}} \exp\left\{-\frac{(E - \Delta_{\text{GT}})^2}{2\sigma_{\text{GT}}^2}\right\}$$

$$\Delta_{\text{C}} = \mp(1.44Z_1A^{-1/3} - 0.7825)\text{MeV}, \sigma_{\text{C}} = 0.157Z_1A^{-1/3}\text{MeV}$$

$Z_1$ 是 $\beta^+$ 衰变子核的质子数,  $\beta^-$ 衰变母核的质子数

● 宽度参数 $\sigma_N$

➤ 最小化 $S$ 的值确定 $\sigma_N$  ( $N_0$ : 原子核数量)

$$S = \sum_{n=1}^{N_0} \left[ \log_{10} \left( T_{1/2}^{\text{cal}}(n) / T_{1/2}^{\text{exp}}(n) \right) \right]^2$$

● 权函数 $W(E, \varepsilon)$

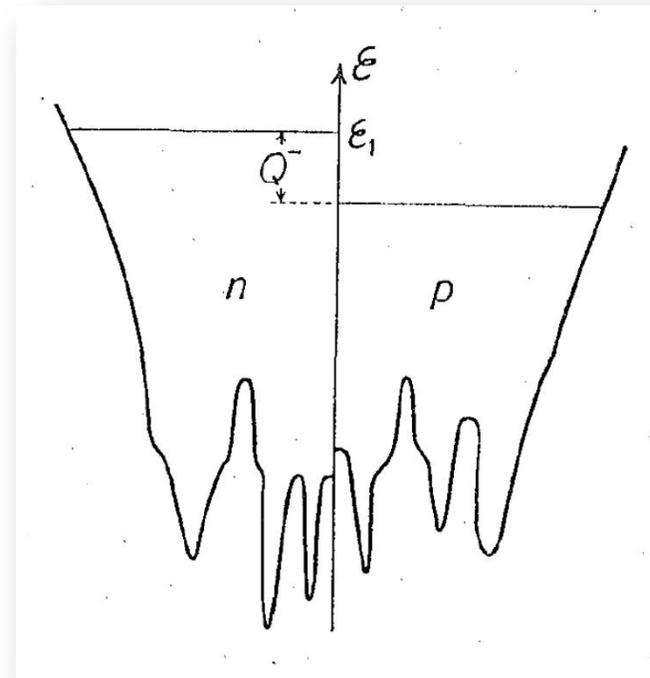
$$W(E, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \varepsilon + E > \varepsilon_1 - Q \\ 0 & \varepsilon + E \leq \varepsilon_1 - Q \end{cases}$$

● 单粒子能量分布 $dN_1/d\varepsilon$  (费米气体模型)

$$\frac{dN_1}{d\varepsilon} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi V \left[ 2M_n^* (\varepsilon - \varepsilon_{\min}) \right]^{1/2}, \quad \varepsilon_{\min} = \varepsilon_1 - \varepsilon_F$$

➤  $M_n^*$  是有效核子质量,  $\varepsilon_F$  是费米能量, 有:

$$\varepsilon_F = \frac{76.52}{(M_n^*/M_n) r_0^2} \left( \frac{N_1}{A} \right)^{2/3} \text{ MeV}, \quad M_n^*/M_n = 0.6.$$





# 目 录



- 研究背景
- 原子核 $\beta$ 衰变的Gross理论
- **对Gross理论的改进**
- 结果与讨论
- 总结与展望

## 研究动机

实验结果表明Gamow-Teller跃迁的中心能量 $\Delta_{GT}$ 不同于Fermi跃迁的中心能量 $\Delta_F$ ，是有一定差距的。

*K. Pham, et al., Phys. Rev. C 51, 526 (1995)*

*H. Akimune, et al., Phys. Rev. C 52, 604 (1995)*

*A. Krasznahorkay, et al., Phys. Rev. C 64, 067302 (2001)*

$$\begin{aligned}\Delta_{GT} - \Delta_F &= \frac{2}{3T_0} \left\langle \pi \left| \sum_{i=1}^A \xi_i \mathbf{l}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \right| \pi \right\rangle - 4A^{-1} (\kappa_\tau - \kappa_{\sigma\tau}) T_0 \\ &= \Delta_{ls} - 4A^{-1} (\kappa_\tau - \kappa_{\sigma\tau}) T_0\end{aligned}$$

*T. Suzuki, Phys. Lett. B 104, 92 (1981)*

*T. Suzuki, Nucl. Phys. A 379, 110 (1982)*

自旋-轨道劈裂项

- 协变密度泛函理论自然地包含了核子的自旋自由度，从而得到在原子核中很强的自旋-轨道相互作用，而不需要引入额外参数。

## 对强度函数峰值位置的改进( $\beta^-$ 衰变)

$$\int_{-\infty}^{\infty} ED_{GT}(E, \varepsilon) dE = \Delta E_{GT}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{GT} \approx \Delta_F \\ \Delta_{GT} = \Delta_F + 26A^{-1/3} - \frac{18.5(N-Z)}{A} \text{ MeV} \\ \Delta_{GT} = \Delta_F + 6.7 - \frac{30(N-Z)}{A} \text{ MeV} \end{array} \right.$$



$$\Delta_{GT} = \Delta_F + \Delta_{\kappa} + \Delta_{ls}$$

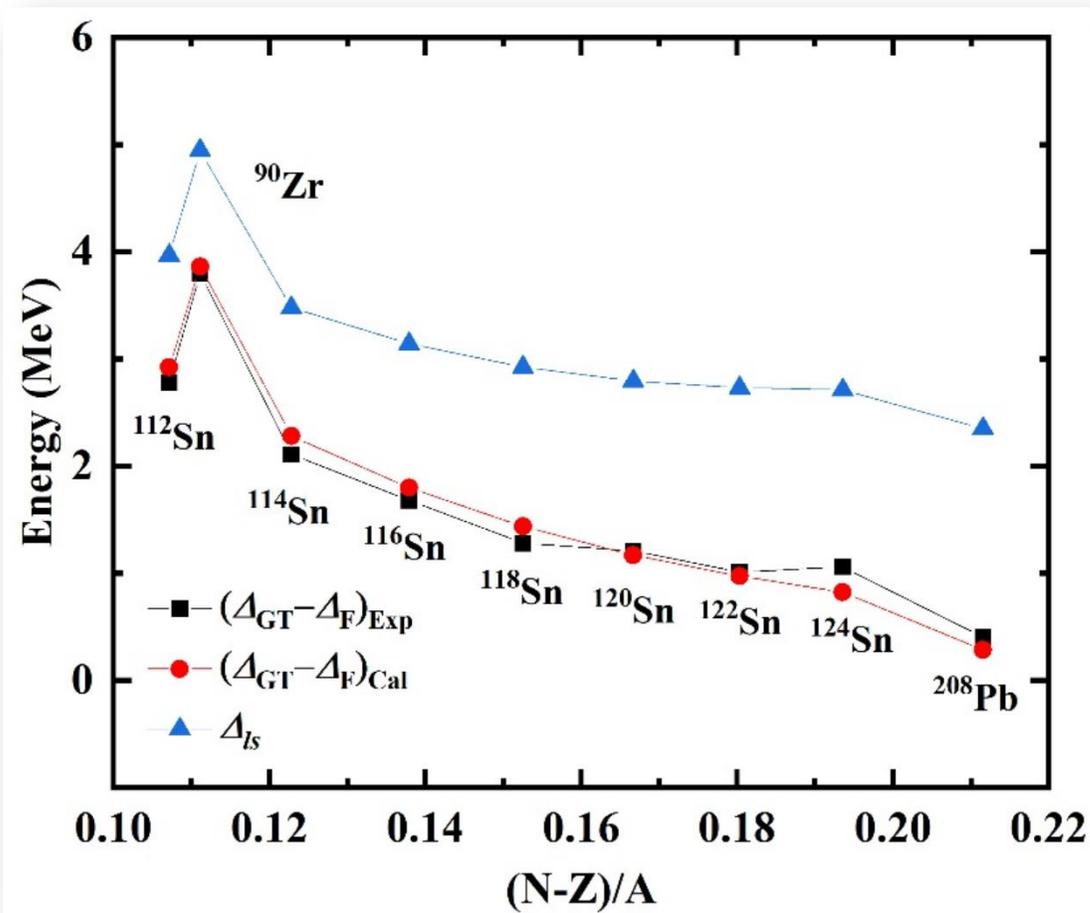
$$\Delta_{\kappa} = 2(\kappa_{\sigma\tau} - \kappa_{\tau})(N-Z)/A$$

$$\Delta_{ls} = \frac{2}{3(N-Z)} E_{ls}$$

$$E_{ls} = \sum_i \frac{\Delta E_i \left[ (u_{p^-}^2 v_{n^+}^2) \mu_{p^-} \mu_{n^+} - (u_{p^+}^2 v_{n^-}^2) \mu_{p^+} \mu_{n^-} \right]_i}{2l_i + 1}, \mu = 2j + 1$$

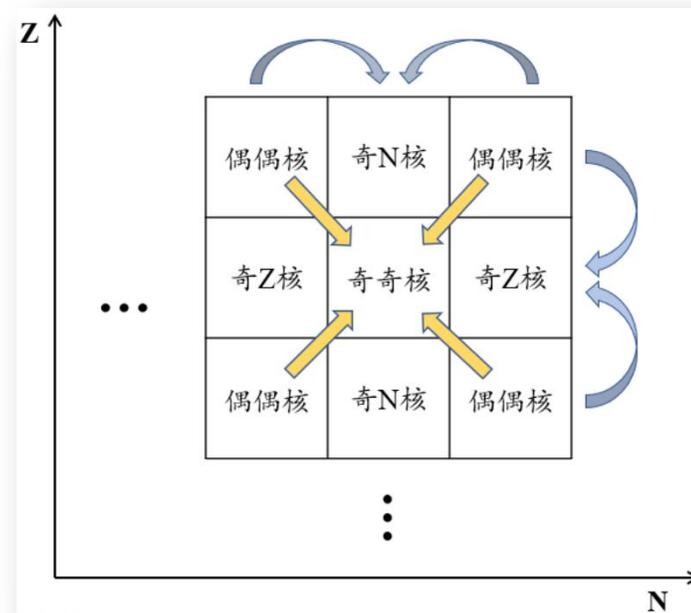
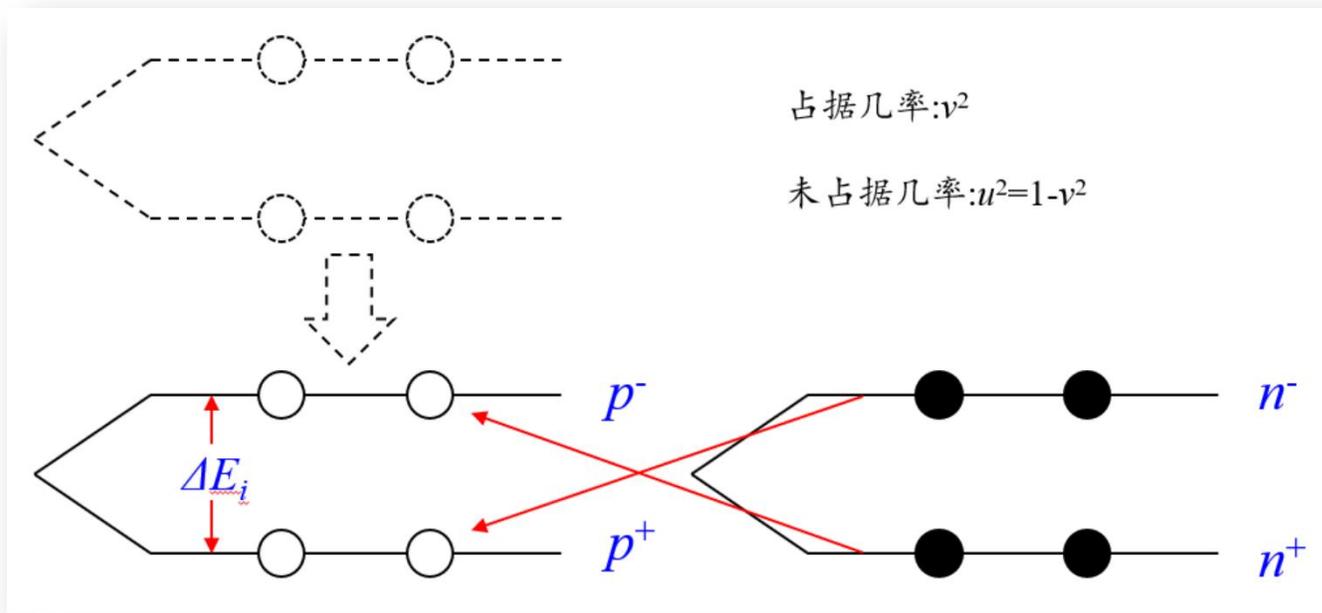
*J. Meng, Tanihata, Nucl. Phys. A 650, 167 (1999)*

首次利用相对论平均场理论提取了公式中的自旋-轨道劈裂，精确地再现实验数据。



Nuclei	Z	N	$\Delta E$	IAS	GTR	$E_{GTR}-E_{IAS}$
$^{90}\text{Zr}$	40	50	6.893	11.893	15.693	3.8
$^{112}\text{Sn}$	50	62	7.842	14.002	16.782	2.78
$^{114}\text{Sn}$	50	64	6.828	14.108	16.218	2.11
$^{116}\text{Sn}$	50	66	5.489	13.849	15.529	1.68
$^{118}\text{Sn}$	50	68	4.439	13.769	15.049	1.28
$^{120}\text{Sn}$	50	70	3.463	13.703	14.913	1.21
$^{122}\text{Sn}$	50	72	2.398	13.638	14.648	1.01
$^{124}\text{Sn}$	50	74	1.399	13.589	14.649	1.06
$^{208}\text{Pb}$	82	126	3.661	18.861	19.261	0.4

➤ 协变密度泛函理论提取的自旋-轨道劈裂对可靠描述Gamow-Teller跃迁能量至关重要。



$$\begin{aligned} \Delta_{GT} - \Delta_F &= \frac{2}{3T_0} \left\langle \pi \left| \sum_{i=1}^A \xi_i \mathbf{l}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \right| \pi \right\rangle - 4A^{-1} (\kappa_\tau - \kappa_{\sigma\tau}) T_0 \\ &= \Delta_{ls} - 4A^{-1} (\kappa_\tau - \kappa_{\sigma\tau}) T_0 \end{aligned}$$

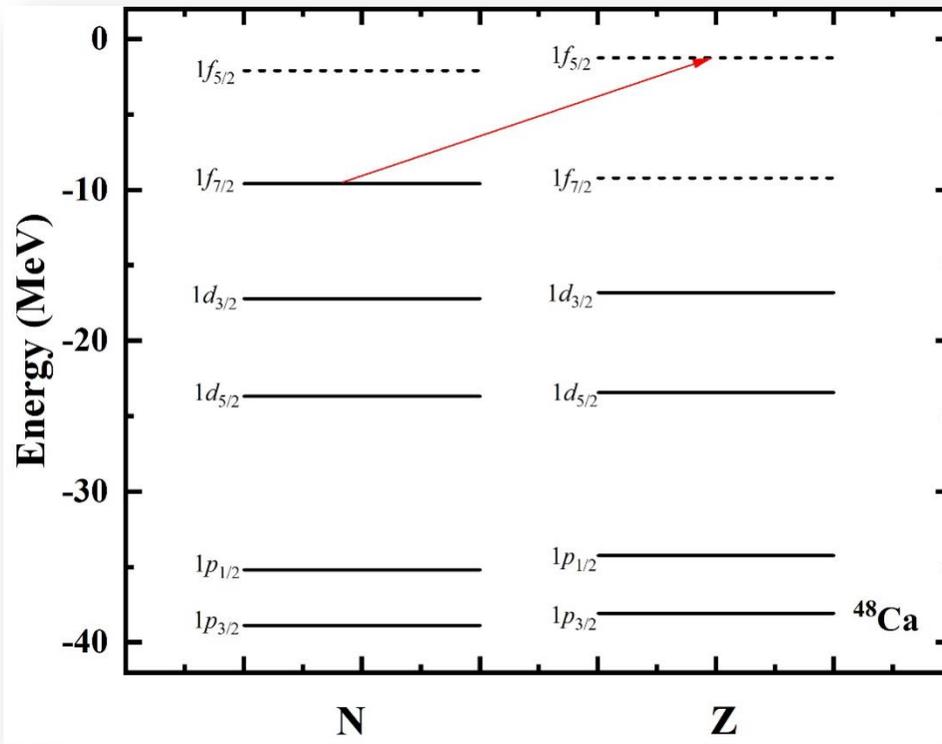
$$\Delta_{ls} = \frac{2}{3(N-Z)} E_{ls}, \quad E_{ls} = \sum_i \frac{\Delta E_i \left[ \left( u_{p^-}^2 v_{n^+}^2 \right) \mu_{p^-} \mu_{n^+} - \left( u_{p^+}^2 v_{n^-}^2 \right) \mu_{p^+} \mu_{n^-} \right]}{2l_i + 1}$$

➤  $\mu = 2j + 1$  是单粒子能级简并度，质子能级和中子能级都来自母核， $p^\pm (n^\pm)$  为自旋相反  $j = l \pm 1/2$  的单质子(中子)态， $i$  是对所有的自旋-轨道伙伴态的求和， $\Delta E_i$  是质子能级的自旋-轨道劈裂。

假设中子和质子的自旋-轨道伙伴态的能量差是一样的。当对关联被关闭时，公式显然变成了（中子）粒子-（质子）空穴对的自旋-轨道伙伴态之间的平均自旋-轨道劈裂。

闭壳核 $^{48}\text{Ca}$ :  
RMF+CMR

$N - Z = 8$ 个中子填充  
 $j = l + 1/2$  ( $1f_{7/2}$ )壳



质子占据主壳层

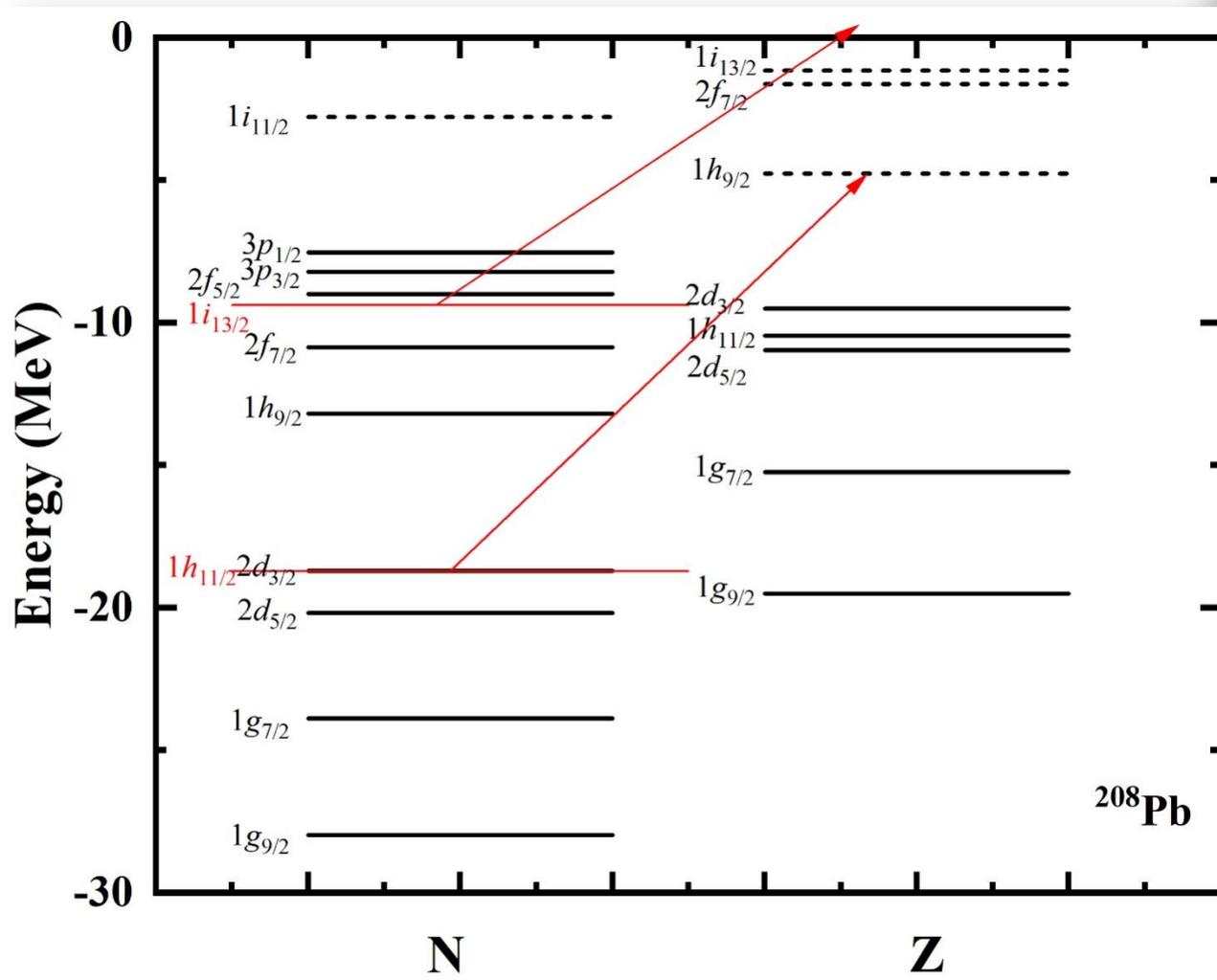
只有自旋-轨道伙伴态( $1f_{7/2}$ ,  $1f_{5/2}$ )对平均自旋-轨道劈裂有贡献

$$E_{ls} (^{48}\text{Ca}) = 48 \Delta E_{1f} / 7, \Delta_{ls} (^{48}\text{Ca}) = 2 E_{ls} (^{48}\text{Ca}) / 24 = 4 \Delta E_{1f} / 7$$

$^{208}\text{Pb}$ :

中子占据  
 $1i_{13/2}$ 壳

质子占据  
 $1h_{11/2}$ 壳



自旋-轨道伙伴态( $2f_{7/2}, 2f_{5/2}$ )和( $3p_{3/2}, 3p_{1/2}$ )的贡献相互抵消, 因此只有剩余的伙伴态( $1h_{11/2}, 1h_{9/2}$ )和( $1i_{13/2}, 1i_{11/2}$ )对平均自旋-轨道劈裂有贡献。

$$E_{ls} (^{208}\text{Pb}) = 120 \Delta E_{1h} / 11 + 168 \Delta E_{1i} / 13$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ls} (^{208}\text{Pb}) &= 2E_{ls} (^{208}\text{Pb}) / 132 \\ &= 4(5\Delta E_{1h} / 11 + 7\Delta E_{1i} / 13) / 11 \end{aligned}$$

$$\xi_5 = \Delta E_i / (2l + 1)$$

$$\Delta_{ls} (^{48}\text{Ca}) = 4\xi_3$$

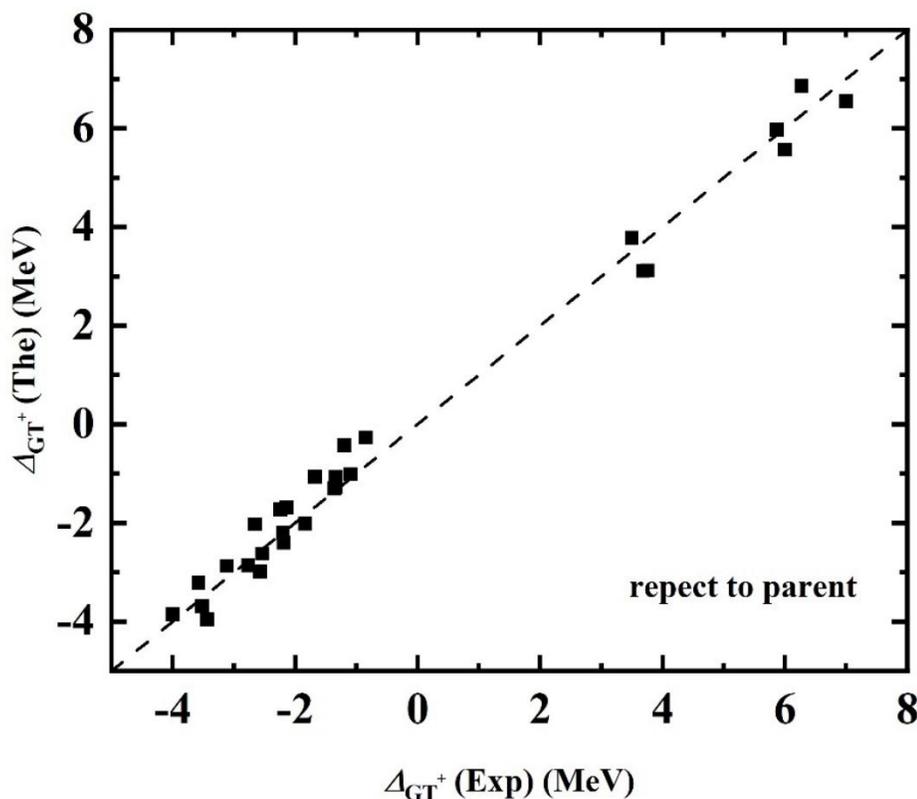
$$\Delta_{ls} (^{208}\text{Pb}) = 4(5\xi_5 + 7\xi_7) / 11$$

*T. Suzuki, Phys. Lett. B* **104**, 92 (1981)

*T. Suzuki, Nucl. Phys. A* **379**, 110 (1982)

## 对强度函数峰值位置的改进( $\beta^+$ 衰变)

$$\Delta_{GT^+} = 11.682264A^{-1/3} - 20.17544(N - Z)/A + \delta 22.4A^{-1/2} \quad \delta = \begin{cases} 0 & \text{偶偶核} \\ 1 & \text{奇质量核} \\ 2 & \text{奇奇核} \end{cases}$$



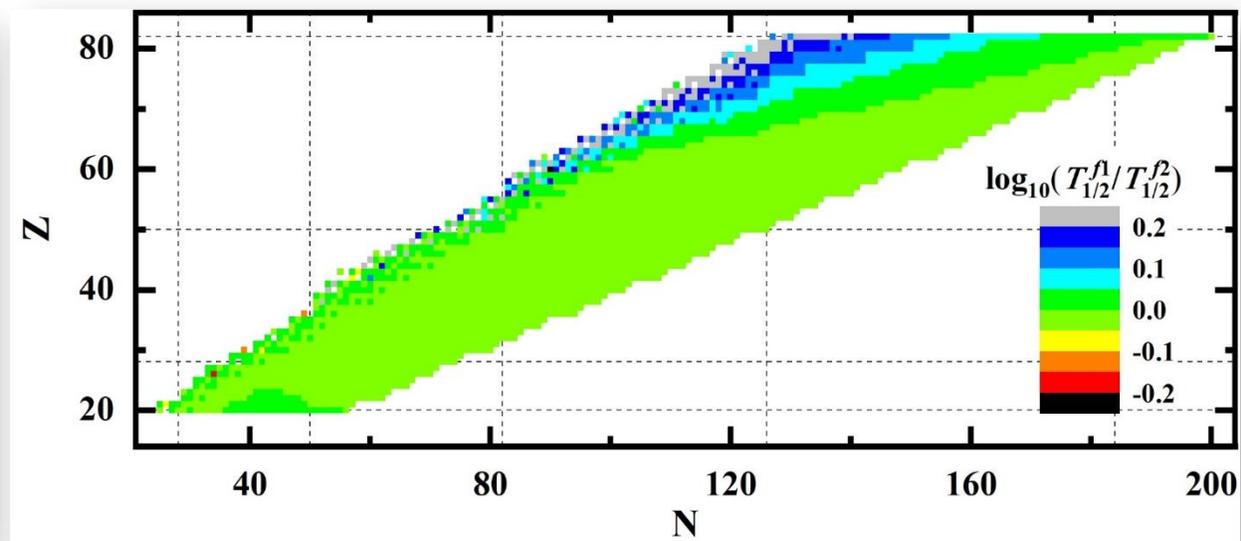
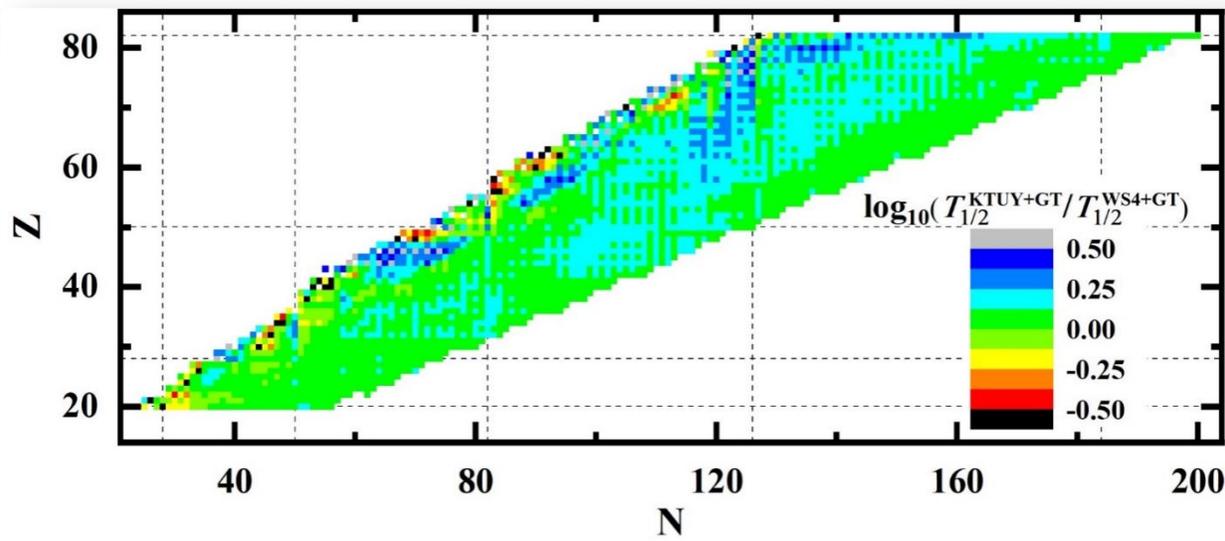
Z	N	Exp	Cal	Z	N	Exp	Cal
23	28	6.27011	6.87148	48	52	-2.66	-2.04035
25	30	7.00222	6.55618	48	54	-1.68	-1.0791
26	28	3.4964	3.75913	49	51	-3.44	-3.91788
26	30	5.99549	5.54686	49	53	-2.57	-2.95096
27	32	5.8648	5.98272	49	54	-2.2	-2.19091
28	30	3.6816	3.09347	49	55	-1.84	-1.98582
32	38	3.7518	3.09532	49	56	-1.34	-1.26064
44	50	-0.85	-0.28371	49	57	-1.1	-0.98631
46	50	-2.24	-1.73601	50	52	-4	-3.86867
46	52	-1.2	-0.44127	50	53	-3.52	-3.681
47	50	-2.77	-2.85039	50	54	-3.12	-2.8852
47	51	-2.19	-2.36669	50	55	-2.54	-2.61494
47	53	-1.36	-1.27582	50	56	-2.14	-1.7078
48	50	-3.58	-3.22817	50	58	-1.34	-1.09138



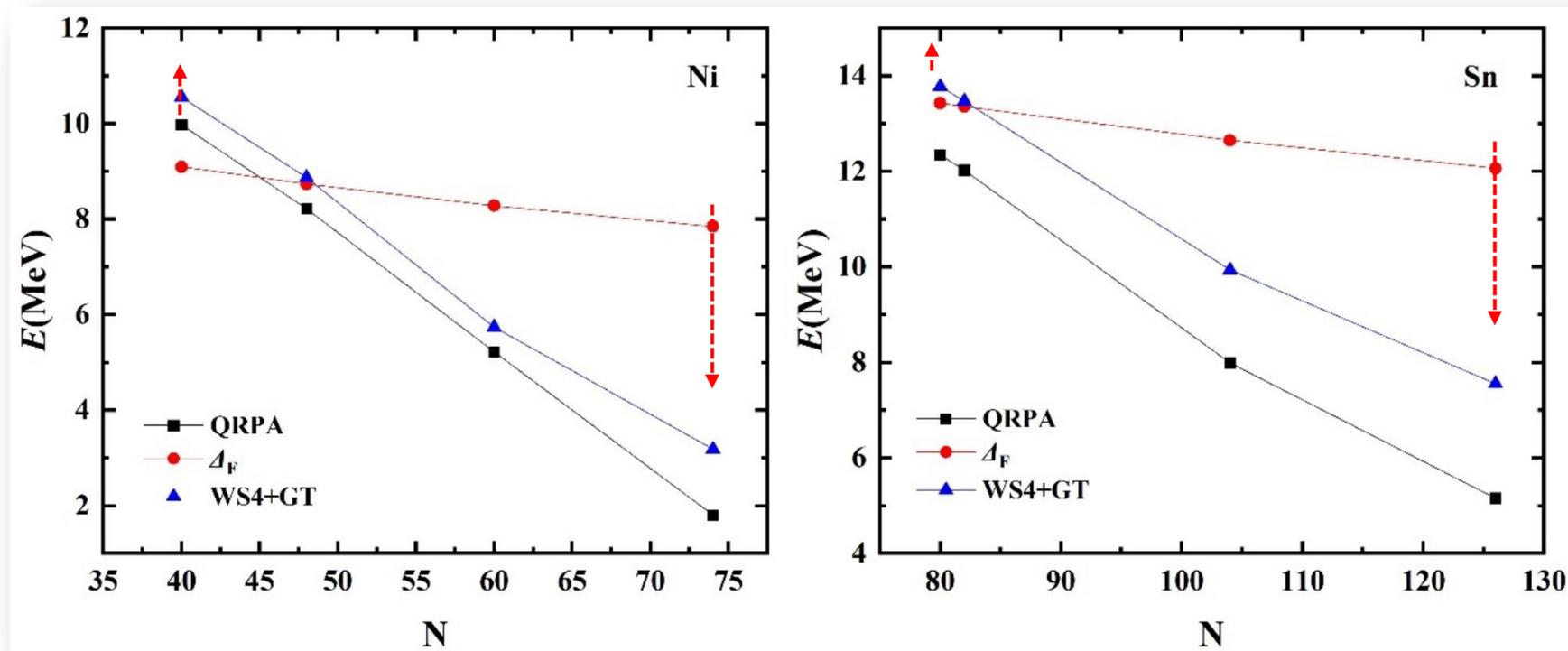
# 目 录



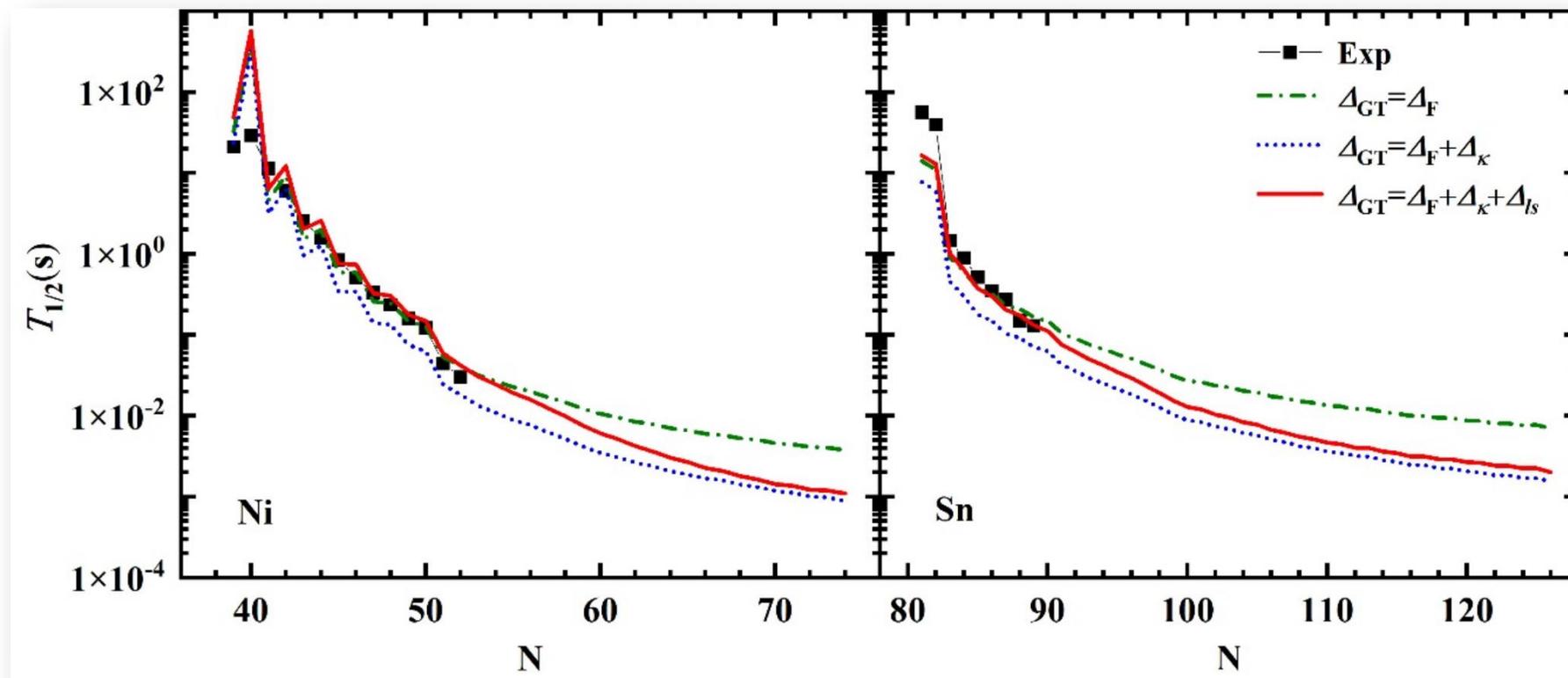
- 研究背景
- 原子核 $\beta$ 衰变的Gross理论
- 对Gross理论的改进
- 结果与讨论
- 总结与展望



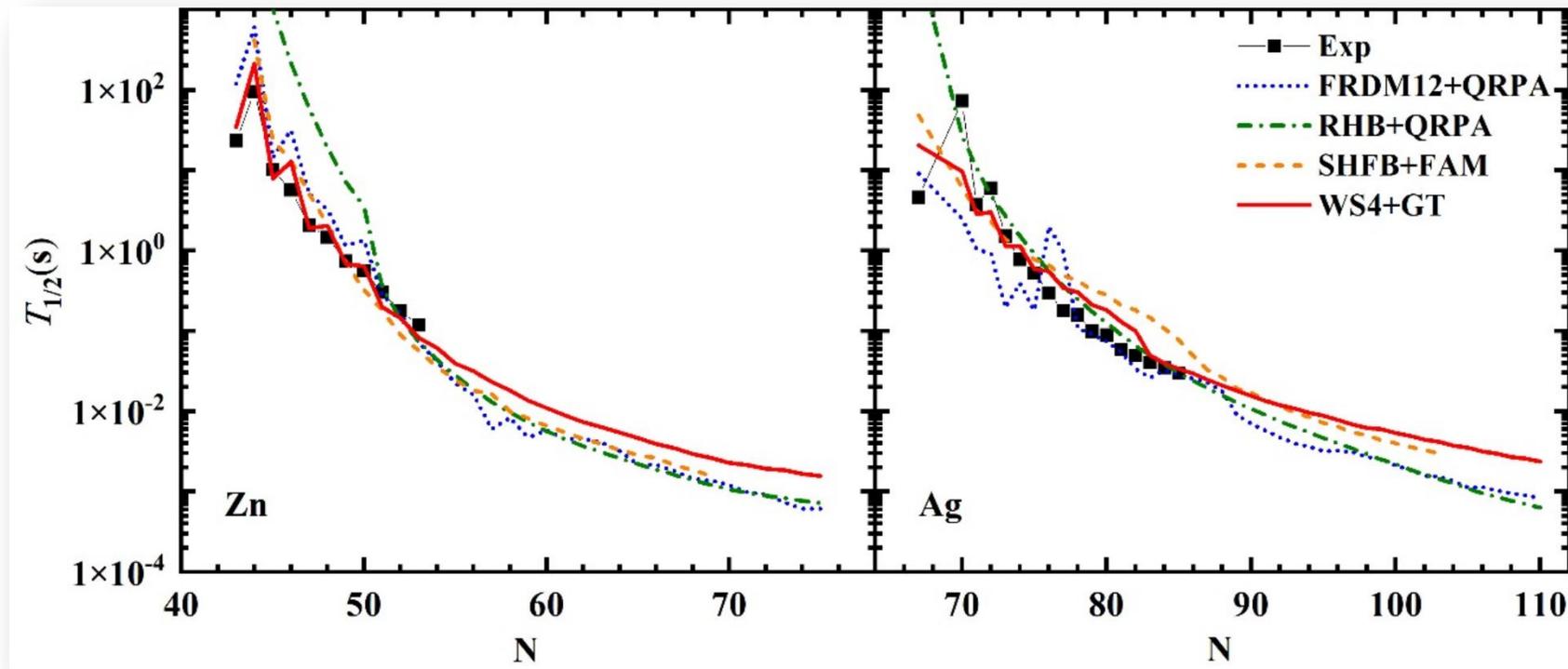
- 丰中子核区： $\beta$ 衰变半衰期的对数差在0.25以内。稳定线附近核区：半衰期的对数差较大，可能由于 $Q$ 值较小， $Q$ 值的微小变化导致半衰期的巨大改变。
- $Z < 70$ 核区：近似积分Fermi函数也很准确。 $Z > 70$ 核区：积分Fermi函数存在较大差异，导致半衰期预测的系统性偏差。
- 有必要采用更精确的原子核质量模型以及更准确的积分Fermi函数。



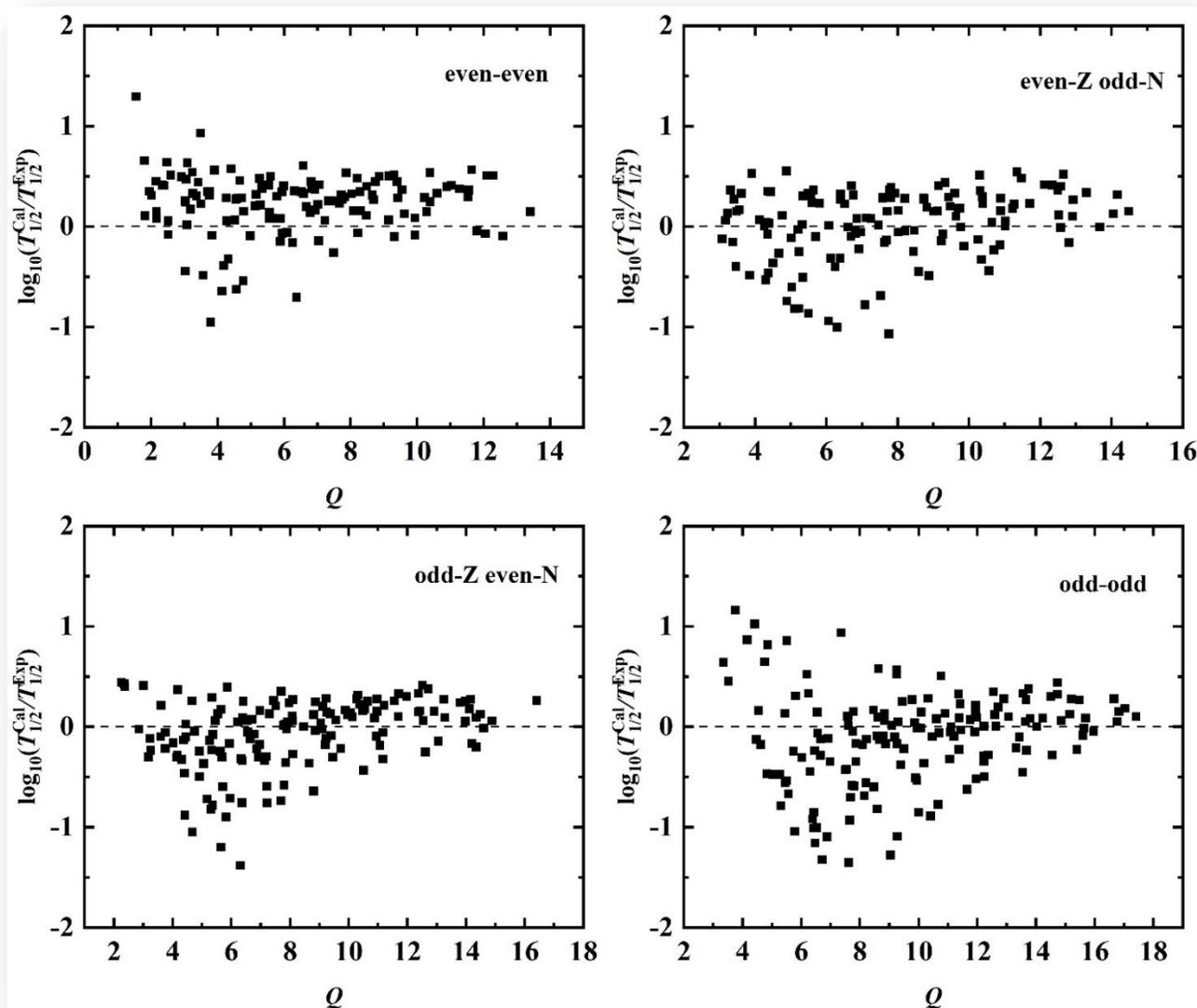
- 发现其与Fermi跃迁中心能量有着明显的差距。
- 我们采用的Gamow-Teller跃迁中心能量与QRPA的结果非常接近且有着相同的下降趋势。



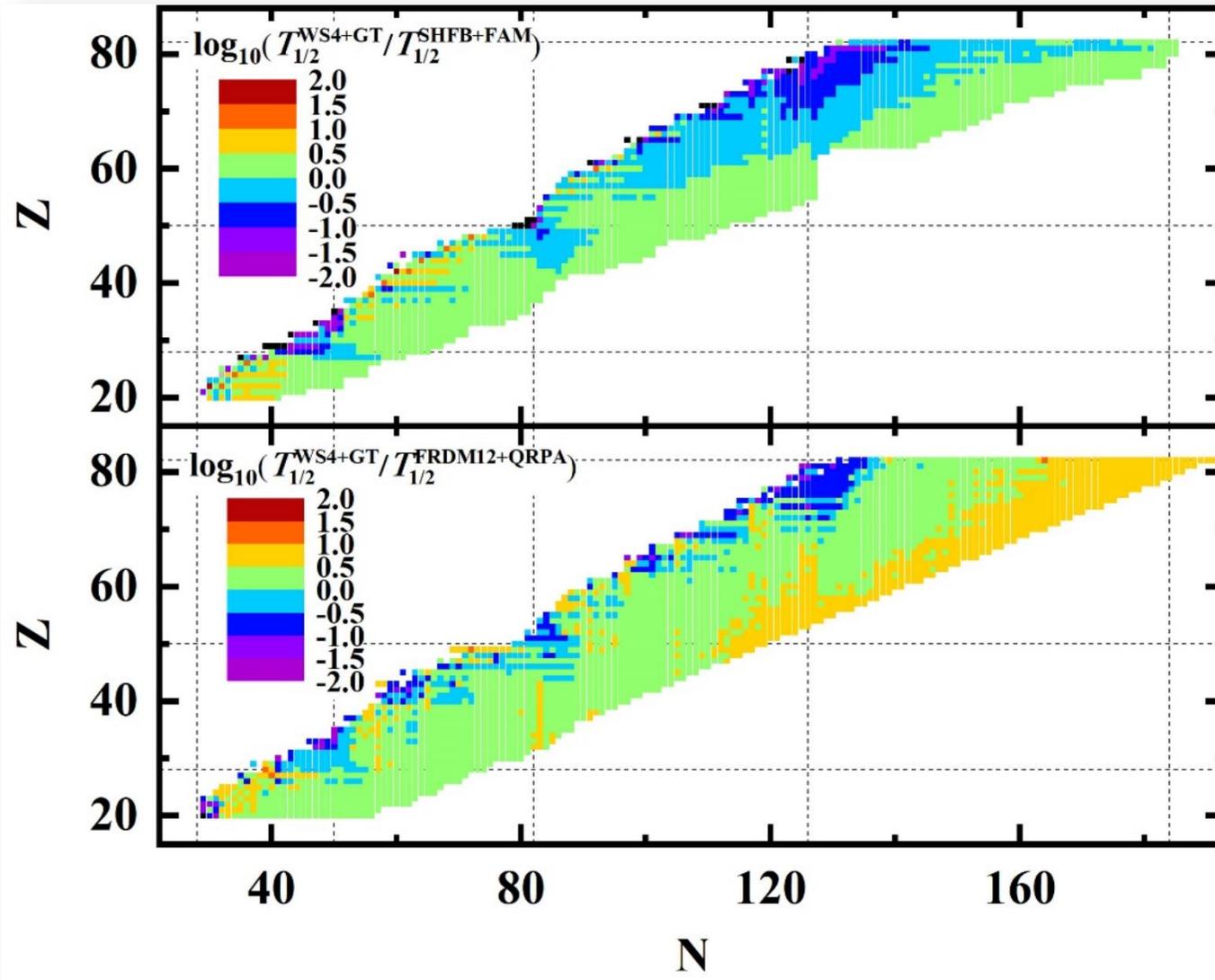
- 剩余相互作用项 $\Delta_K$ 的加入，降低了预测的 $\beta$ -衰变半衰期，并且随着中子数的增加其影响越来越大。
- 进一步在 $\Delta_{GT}$ 中加入 $\Delta_{Is}$ 项，有效地消除了对半衰期的低估，因此可以很好地再现实验半衰期。



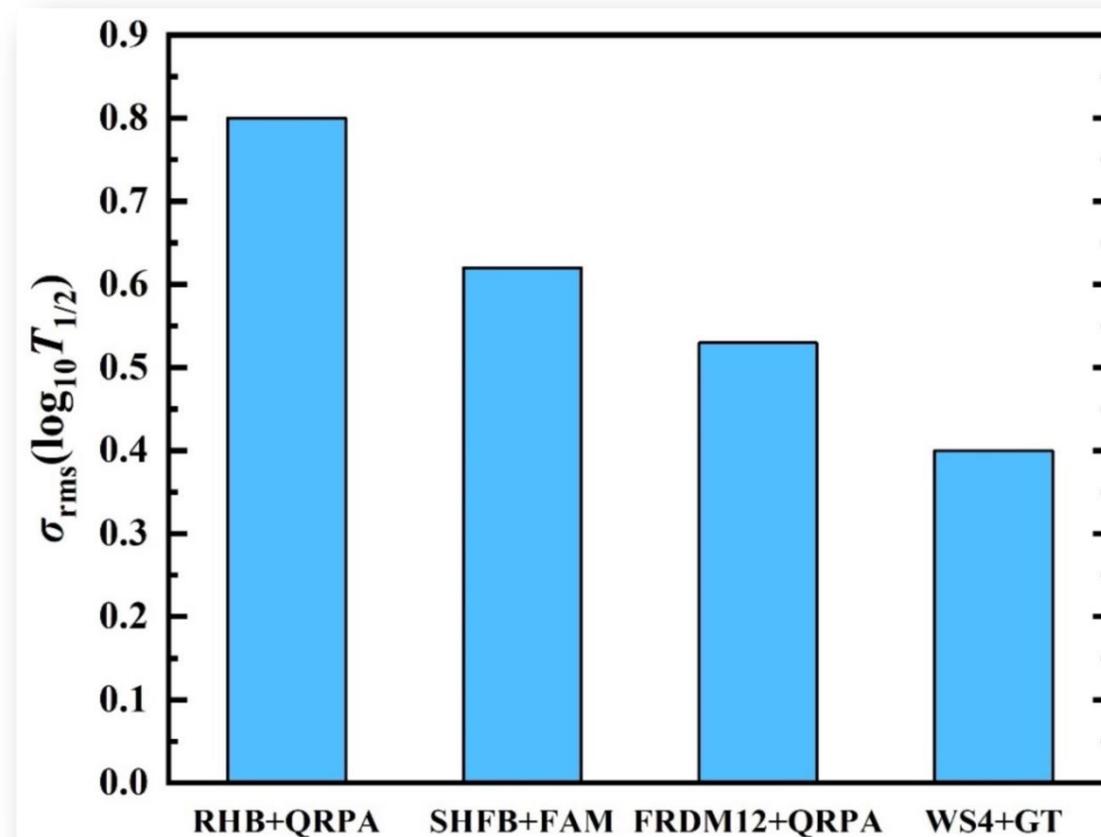
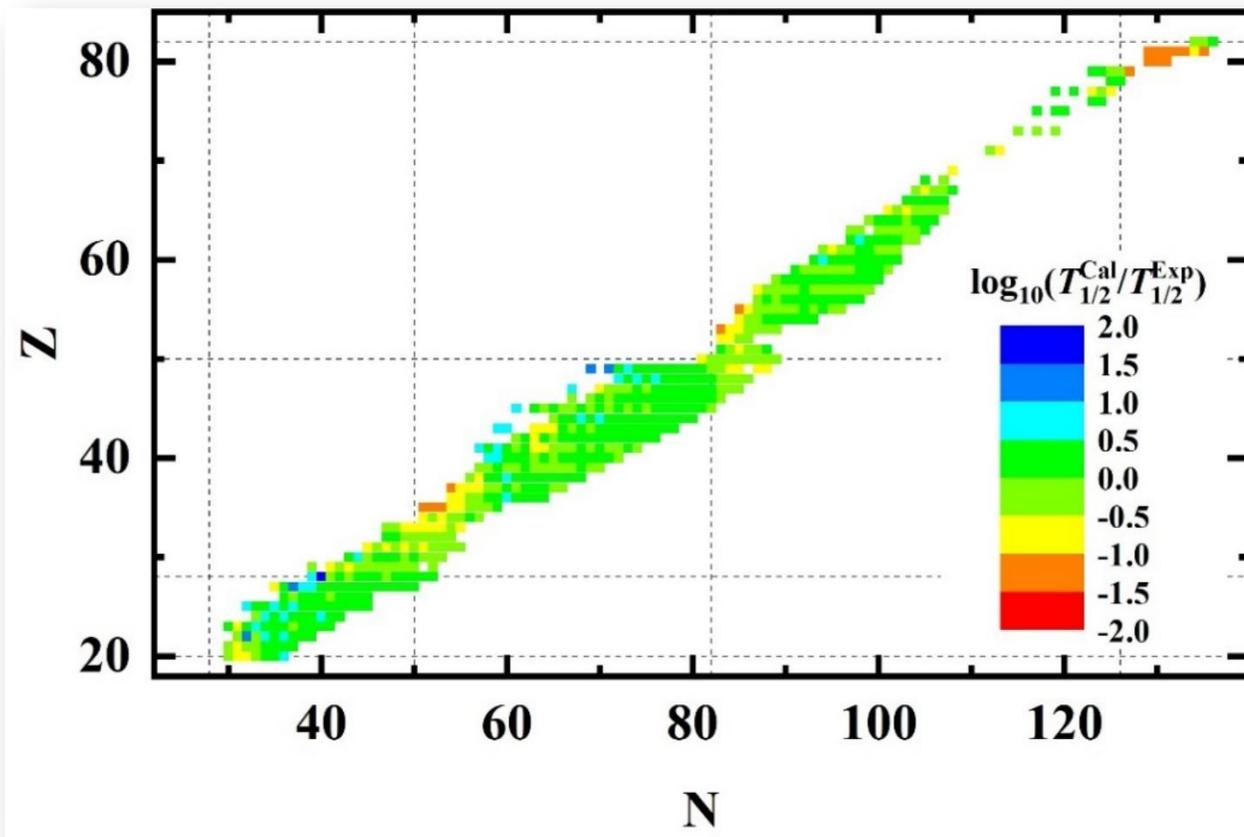
- 已知核区：WS4+GT模型更好地再现了原子核 $\beta$ 衰变半衰期。
- 未知核区：WS4+GT模型与微观模型的结果非常接近。



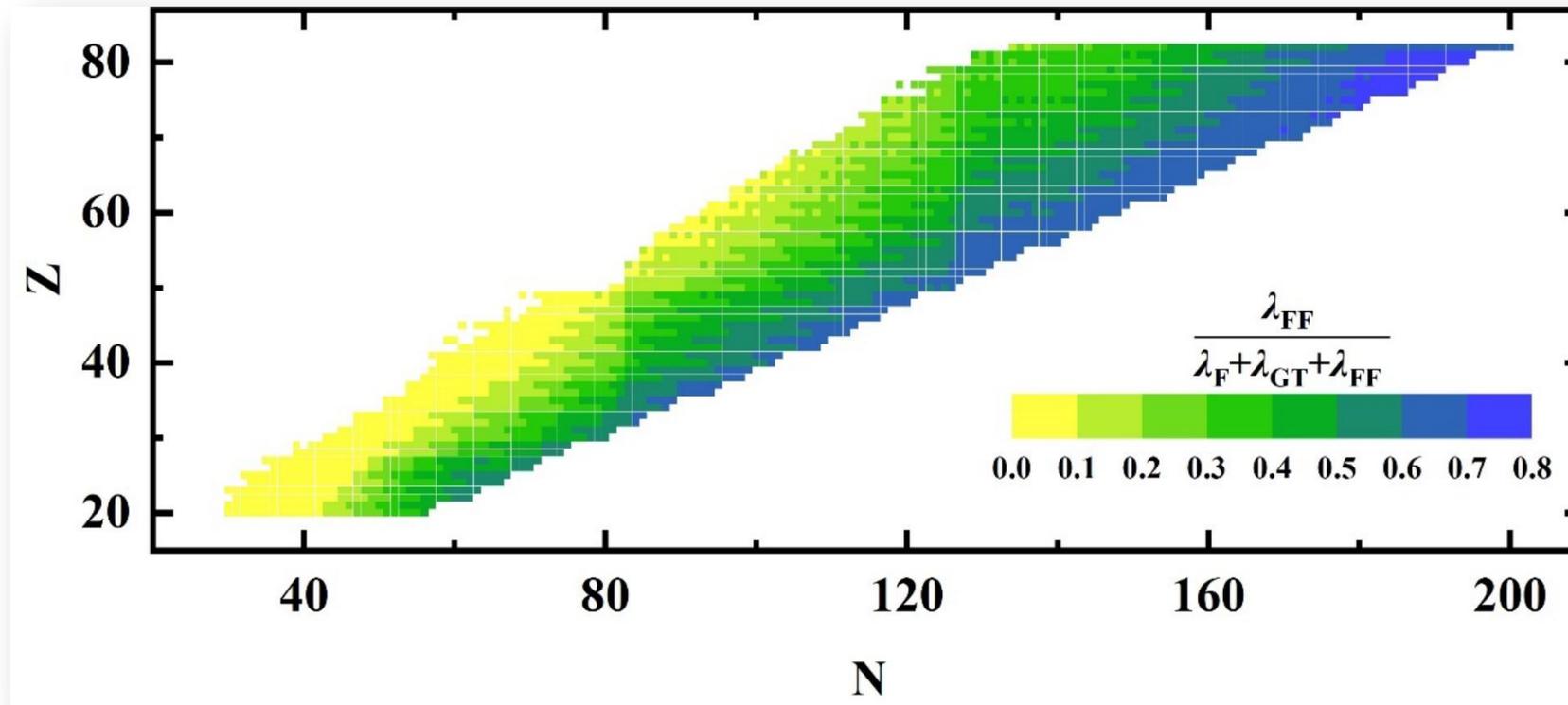
- WS4+GT模型很好地再现了原子核 $\beta$ 衰变半衰期，大部分原子核偏差都在1以内。
- 随着 $Q$ 值的增大，结果越来越靠近0，能够更好地描述 $Q$ 值较大的原子核。



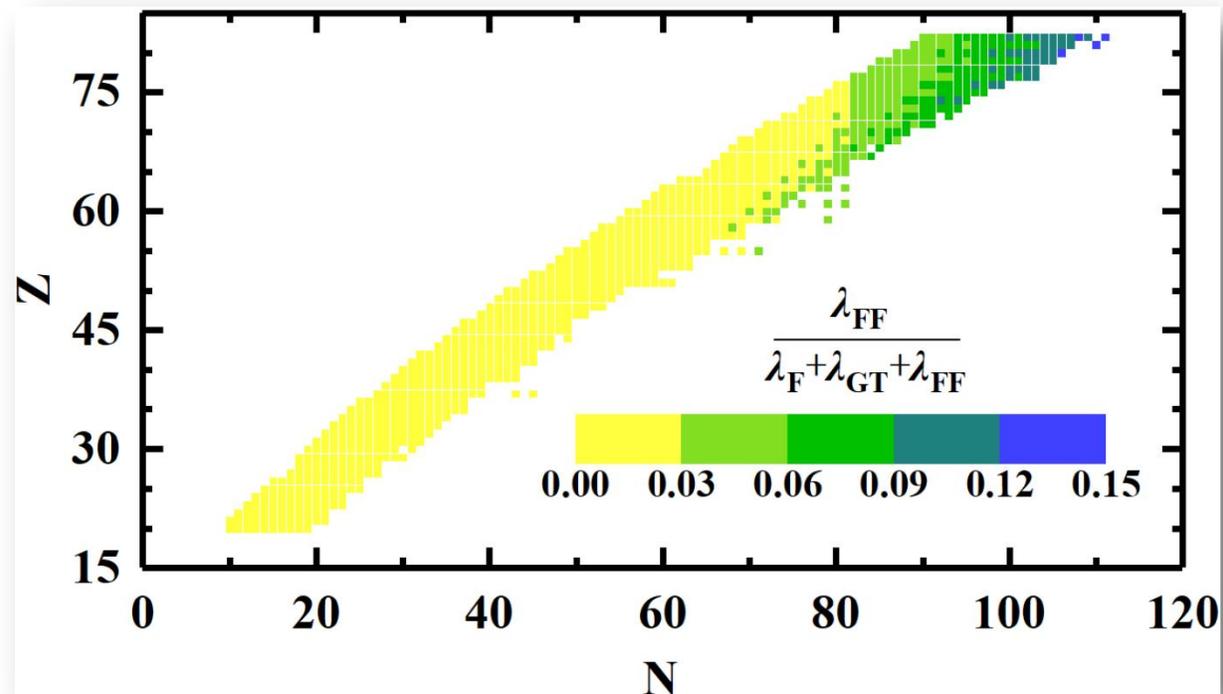
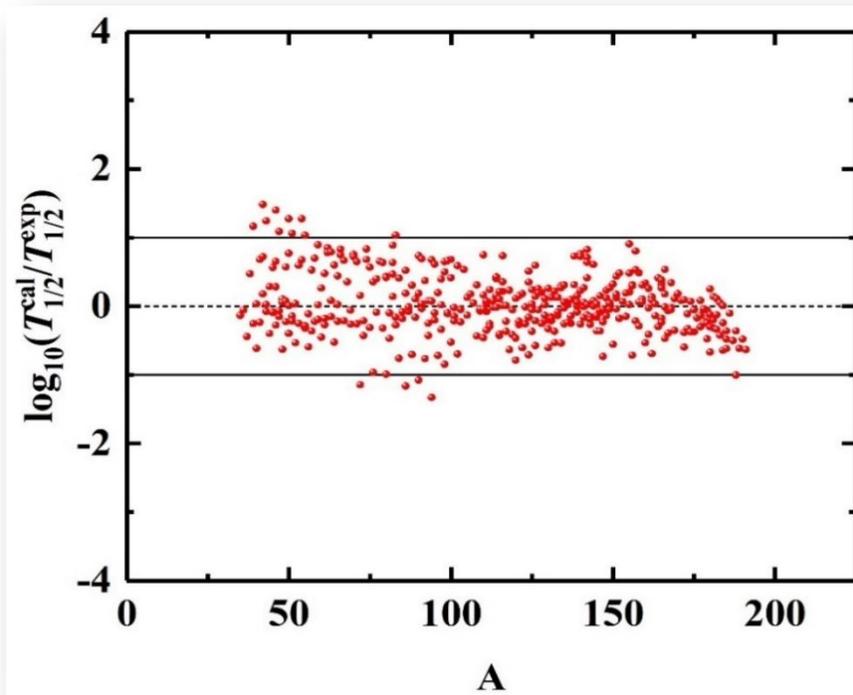
➤ 除了部分靠近稳定线的核区，WS4+GT模型与SFHB+FAM、FRDM12+QRPA模型的结果非常接近，特别是与微观的SFHB+FAM模型，丰中子核区偏差基本都在0.5以内。



	WS4+GT	SHFB+FAM	RHB+QRPA	FRDM12+QRPA
$rms(\log_{10} T_{1/2})$	<b>0.40</b>	0.62	0.80	0.53



➤ 丰中子核区，一级禁戒跃迁对原子核总衰变率的贡献很大，占主导地位。



	WS4+GT	FRDM12+QRPA
rms( $\log_{10} T_{1/2}$ )	<b>0.44</b>	0.58

➤ 很好地再现了实验 $\beta^+$ /EC衰变半衰期，只有极少数核与实验半衰期的偏差在1以外，但均在1.5以内。

- 轻核区：一级禁戒跃迁的贡献很小，在3%以下。
- 重核区：一级禁戒跃迁对总衰变率的贡献很大，甚至接近15%。



# 目 录



- 研究背景
- 原子核 $\beta$ 衰变的Gross理论
- 对Gross理论的改进
- 结果与讨论
- 总结与展望

## ● 总结与展望

- 丰中子原子核的 $\beta$ 衰变：**基于相对论Hartree-Bogoliubov (RHB) 理论**提取了其自旋-轨道劈裂，用于**改进Gross理论的Gamow-Teller-跃迁中心能量**。
- 缺中子原子核的 $\beta^+$ /EC衰变：由于其 $\beta$ 衰变子核中往往不存在与母核基态对应的同位旋相似态，**发展了最新的Gamow-Teller<sup>+</sup>跃迁中心能量的理论公式**，得到的Gamow-Teller跃迁中心能量的结果与实验数据非常吻合。
- Gross理论仍然还有很大的改进空间，例如，单粒子强度函数的形式、更准确的单粒子能级以及考虑其他更精确地微观效应如子核和母核的壳效应等。

感谢各位老师同学！

安徽理工大学

